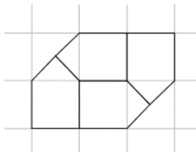
ETC 22 marzo 2021

1. Quanti sono i lati dei poligoni per i quali la metà della somma degli angoli interni è uguale al doppio della somma degli angoli esterni? Risposta 10

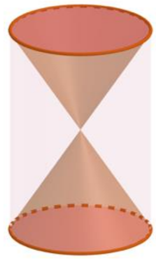
<u>Soluzione</u> – La somma degli angoli interni di un qualunque poligono di n lati vale (n-2)π, mentre la somma degli angoli esterni è sempre 2π. Dunque, si ha: $\frac{1}{2}(n-2)\pi = 4\pi$; $n-2=8$; $n=10$

2. La figura a fianco rappresenta una parte del pavimento di una stanza, formata da mattonelle tutte uguali. Il perimetro di una mattonella è 50 cm. Quanto vale, in cm, il perimetro della figura? Risposta 100



<u>Soluzione</u> – Il perimetro della figura contiene due volte i segmenti che contornano una mattonella, quindi è 2 volte il perimetro di una mattonella e la risposta è 100.

3. In figura è rappresentata una clessidra inserita in un cilindro di vetro. Se il volume della clessidra rappresentata è 223, qual è il volume del cilindro? Risposta 669



<u>Soluzione</u> – Sappiamo che il volume di un cono è 1/3 del volume del cilindro con base e altezza uguali a quelle del cono. Il volume del cilindro è pertanto 669, tre volte quello del cono.

4. Un uomo, alla richiesta di restituire una somma di denaro avuta in prestito, rispose: "Restituirò il denaro questo mese e precisamente nel giorno rappresentato da un numero le cui sue due cifre sono numeri consecutivi, tali che la differenza dei loro quadrati dia come risultato 9. In quale giorno l'uomo restituì il suo debito. Risposta 0

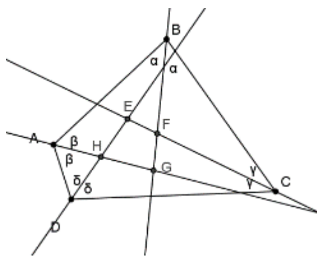
<u>Soluzione</u> – Indicando con n e n+1 le due cifre si ha:

$(n+1)^2 - n^2 = 9$ $\quad$ $n^2 + 2n + 1 - n^2 = 9$ $\quad$ $2n = 8$ $\quad$ $n = 4$

Le due date possibili sono quindi 45 e 54, entrambi i numeri non sono accettabili. Praticamente, l'uomo, furbo, non voleva pagare.

5. Le bisettrici di un quadrilatero convesso ABCD, tali che 3 di esse non passino per uno stesso punto, formano un quadrilatero convesso EFGH. Quanto vale, in gradi, la somma $\widehat{HEF} + \widehat{HGF}$? Risposta 180

<u>Soluzione</u> – Indichiamo con $2\alpha, 2\beta, 2\gamma, 2\delta$, gli angoli del quadrilatero ABCD. Osserviamo che $2\alpha + 2\beta + 2\gamma + 2\delta = 360°$ e pertanto $\alpha + \beta + \delta + \gamma = 180°$ Considerando i triangoli DEC e ABG si ha: $\widehat{HEF} + \widehat{HGF} = (180° - \delta - \gamma) + (180° - \alpha - \beta) = 360° - (\alpha + \beta + \delta + \gamma) = 360° - 180° = 180°$



6. In un supermercato di Ftlandia 2 secchielli, 1 materassino e 4 palette costano 1210 fteuro, 1 secchiello, 2 materassini e 2 palette costano 944 fteuro. Quanti fteuro costa un materassino? Risposta 226

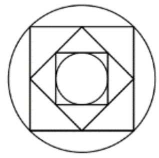
<u>Soluzione</u> – Raddoppiando i dati della seconda relazione si ottiene che:

2 secch, 4 mat e 4 pal costano 1888 fteuro

Sottraendo a questa la prima relazione: 2 secch, 1 mat e 4 pal costano 1210 fteuro

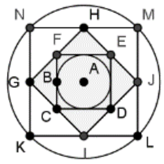
si ottiene che 3 materassini costano 678 fteuro, per cui uno costa 226 fteuro.

7. Il logo di una certa società ha la forma della figura a fianco, cioè tre quadrati inscritti l'uno nell'altro e due cerchi. Qual è il rapporto tra l'area del cerchio più grande e quella del cerchio più piccolo? Risposta 8



Soluzione 1 – I quadrati sono disposti in modo che la diagonale di uno è il lato di quello ad esso circoscritto. Supponiamo allora che il raggio r della circonferenza più piccola misuri 1. Il lato del quadrato più piccolo è 2, quello del quadrato a questo circoscritto è $2\sqrt{2}$ e quello del quadrato più esterno $2\sqrt{2} * \sqrt{2} = 4$. La diagonale di quest'ultimo è pertanto $4\sqrt{2}$ che è anche in diametro della circonferenza esterna. Ne segue che il rapporto fra le aree delle due circonferenze è $8\pi/\pi = 8$

Soluzione 2 – Supponiamo che il raggio r della circonferenza più piccola misuri 1. Il lato del quadrato più piccolo è 2 e quello del quadrato a questo circoscritto è $\overline{GH} = \overline{CE} = 2\sqrt{2}$. Ne segue che, poiché i triangoli GNH e KNM sono simili e il loro rapporto di similitudine è 2, si ha: $\overline{MK} = 4\sqrt{2}$. Pertanto, il rapporto tra i diametri delle due circonferenze è $2\sqrt{2}$ e il rapporto fra le loro aree è $\left(2\sqrt{2}\right)^2 = 8$

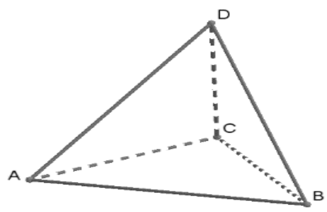


8. Fra i numeri formati da cifre tutte diverse fra loro e con le cifre vicine che non sono mai consecutive, qual è il più grande? Scrivi le 4 cifre centrali del numero trovato. Risposta 8642

Soluzione – Il numero cercato è 9758642031

9. Nella tomba del faraone Tetrankamon è stata ritrovata una pietra preziosa a forma di tetraedro, i cui spigoli misurano, in mm, 54, 32, 32, 29, 27, 20. Se indichiamo con A, B, C, D, i vertici del tetraedro, e sapendo che AB = 54, quanti mm è lungo CD? Risposta 20.

Soluzione – Considerando i due triangoli ABD e ABC deve essere: $\overline{AB} < \overline{AD}+\overline{DB}$ e $\overline{AB} < \overline{AC} + \overline{CB}$ e quindi 54 < $\overline{AD} + \overline{DB}$ e 54 < $\overline{AC} + \overline{CB}$. Poiché la somma di 20 con 32 o 32 o 29 o 27 è sempre inferiore a 54, lo spigolo di lunghezza 20 non può essere nessuno fra AC, BC, AD, BD e pertanto deve essere necessariamente CD=20.



10. Nonno Alberto, che ha una famiglia numerosa, teme di confondersi con i suoi undici nipoti e decide perciò di appuntarsi in un foglietto i nomi e le età di ciascuno di loro. Nel farlo si accorge di una cosa strana: sommando i quadrati delle età di Aldo, Bianca e Carlo si ottiene lo stesso numero che sommando i quadrati delle età di Carlo, Diana e Enzo. Incuriosito, osserva che si ottiene lo stesso numero sommando sia i quadrati delle età di Enzo, Flavia e Gino sia i quadrati delle età di Gino, Ivana e Lidia. Ma ancora più incredibile è che anche sommando i quadrati delle età di Lidia, Marco e Mattia si trova sempre lo stesso numero, cioè 194. Tutti i nipoti hanno età diverse tranne Marco e Mattia che sono gemelli. Quanti anni ha Diana? Risposta 11

Soluzione – I quadrati minori di 194 sono:

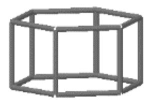
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169

Per risalire alle età dei nipotini, che indicheremo con le loro iniziali, procediamo a ritroso, partendo dall'ultimo dato che riguarda i gemelli e eliminiamo via via i quadrati utilizzati.

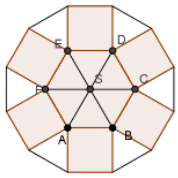
- $L^2 + M^2 + M^2 = 194$. Poiché la somma dei quadrati delle età dei due gemelli è un numero pari, anche L è un numero pari. Procedendo per tentativi si trova che L è 12 infatti 144 + 25 + 25 = 194. Quindi **M = 5** e **L = 12**.

- $G^2 + I^2 + L^2 = 194$. Sapendo che $L^2 = 144$, cerchiamo G e I in modo che $G^2 + I^2 = 50 = 1 + 49$, otteniamo 1 e 7 ma non sappiamo quale è G e quale è I.
- $E^2 + F^2 + G^2 = 194$. Questa relazione esclude che G possa valere 1, quindi **G = 7** e **I = 1** da cui $E^2 + F^2 = 145$. Pertanto, E e F, indipendentemente dall'ordine, valgono 8 e 9.
- Sapendo che $C^2 + D^2 + E^2 = 194$, escludiamo che E possa valere 9, per cui **E = 8** e **F = 9** e la relazione sarà 9 + 121 + 64 = 194. C e D, indipendentemente dall'ordine, valgono 3 e 11.
- $A^2 + B^2 + C^2 = 194$. Per stabilire quale delle due è l'età di Diana utilizziamo la relazione che lega A, B e C che non può che essere 16 + 169 + 9. Pertanto, C = 3 e D = 11.

11. Andrea ha una scatola senza coperchio a forma di prisma regolare, con base esagonale. Le facce laterali sono quadrati di lato 6 cm. Taglia la scatola lungo gli spigoli laterali e la dispone aperta su un tavolo. Poi con una matita disegna i segmenti che uniscono, a due a due, i vertici esterni dei quadrati consecutivi. Qual è l'area del poligono appena disegnato? Risposta 403



Soluzione – Poiché i triangoli isosceli bianchi in figura hanno l'angolo opposto alla base pari a 360° - 90° - 90°- 120° = 60°, essi sono equilateri ed uguali ai 6 triangoli colorati che formano l'esagono.



Ne segue che la figura disegnata da Andrea è un dodecagono regolare composto da 6 quadrati uguali e 12 triangoli equilateri uguali. Ciascun triangolo ha lato 6, altezza $3\sqrt{3}$ e area $\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,6\right) = 9\sqrt{3}$. Ne segue che l'area del dodecagono è $6 \cdot 36 + 12 \cdot 9\sqrt{3} = 216 + 108\sqrt{3} = 403{,}0614$

12. Alice aveva un sacchetto con 130 caramelle, ma il fratellino ne ha mangia te alcune. Contando le caramelle rimaste 6 a 6 oppure 8 a 8 oppure 10 a 10, Alice si accorge che ne rimangono sempre 4. Quante caramelle ha mangiato il suo fratellino? Risposta 6

Soluzione 1 – Detto n il numero di caramelle mangiate dal fratellino, si ha che (130 – n – 4) è multiplo di 6, di 8, di 10 cioè (126 – n) è multiplo del mcm (6, 8, 10) = 120. Pertanto, le caramelle mangiate dal fratellino sono 6.

Soluzione 2 – Togliendo alle 130 caramelle le 4 che rimangono si ottiene 126, che diviso per 8 e per 10 dà come resto 6. Se il problema ammette soluzione questa è 6. Verificato che (130 – 6) diviso per 6 dà resto 4, posso concludere che 6 sono le caramelle mangiate dal fratellino.

Soluzione 3 – I numeri inferiori a 130 e superiori a 10 che divisi per 10 danno resto 4 sono:

124 ; 114 ; 104 ; 94 ; 84 ; 74 ; 64 ; 54 ; 44 ; 34 ; 24 ; 14

Di questi quelli che divisi per 8 danno resto 4 sono:

124 ; 84 ; 44

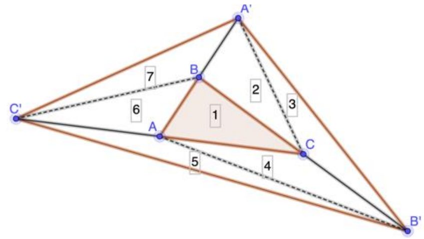
Fra questi rimasti l'unico che diviso per 6 dà resto 4 è solo il numero 124 e quindi l'unica risposta è 130 – 124 = 6

13. Nel centro di una piazza c'è un'aiuola a forma di triangolo: ABC. Si vuole ingrandire tale aiuola in modo che la sua forma diventi quella del triangolo A′B′C′ costruito nel modo seguente: A e A′ si corrispondono in una simmetria di centro B, B e B′ si corrispondono in una simmetria di centro C, C e C′ si corrispondono in una simmetria di centro A. Se prima l'area dell'aiuola valeva 9 rispetto al m², quanto vale l'area di A′B′C′? Risposta 63

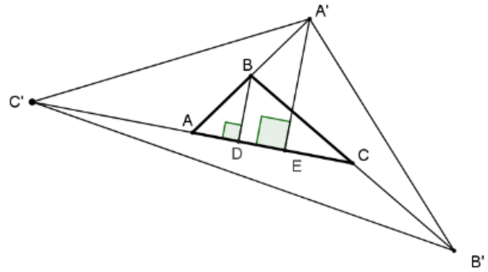
Soluzione 1 – I sette triangoli che si formano sono a due a due equivalenti per avere base e altezza uguali. Se numeriamo i triangolini come in figura si ha l'equivalenza di:

1 e 2 1 e 6 1 e 4 2 e 3 4 e 5 6 e 7

Quindi sono tutti equivalenti fra loro e l'area di A′B′C′ è 7 volte l'area di ABC: $Area(\mathrm{A'B'C'}) = 7 \cdot 9 = 63$



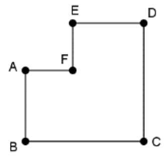
Soluzione 2 – Si ha: AB = BA′, CA = AC′, BC= CB′, perché tali segmenti si corrispondono a due a due in una simmetria centrale. Consideriamo i triangoli AA′C′ e ABC. Tali triangoli hanno basi uguali: CA = AC′ e altezze A′E e BD tali che A′E = 2BD. Infatti, poiché nel triangolo AA′E il segmento BD è parallelo al segmento A′E condotto dal punto medio B di AA′, ne segue che D è punto medio di AE e BD è la metà di A′E. Pertanto, *Area*(AA′C′) = 2 *Area*(ABC). Allo stesso modo si può dimostrare che *Area*(A′BB′) = 2 *Area*(ABC) e che *Area*(CB′C′) = *2Area*(ABC). Dunque: $Area(\mathrm{A'B'C'}) = 7Area(\mathrm{ABC}) = 7 \cdot 9 = 63$



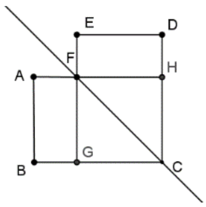
14. Le estrazioni del lotto vengono fatte indipendentemente in varie città. In ogni città vengono estratti, senza reinserimento, 5 numeri da un'urna contenente, senza ripetizione, i 90 numeri interi compresi fra 1 e 90. Considerando le estrazioni di Palermo, Firenze e Napoli, qual è la probabilità p che il numero 90 venga estratto in una e in una sola di queste 3 città? Scrivi le prime quattro cifre decimali di p. Risposta 1486

Soluzione – La probabilità che esca il 90 in una città è $\frac{5}{90}$, la probabilità che non esca il 90 in una città è $\frac{85}{90}$. La probabilità che esca il 90 in una sola delle 3 città è il prodotto tra la probabilità che esca in una città e non esca nelle altre due, cioè $\frac{5}{90} \cdot \frac{85}{90} \cdot \frac{85}{90}$. Poiché le città sono 3 e quanto detto può accadere in ciascuna di esse, si ha $p = 3\frac{5}{90} \cdot \frac{85}{90} \cdot \frac{85}{90}$ = 0,1486

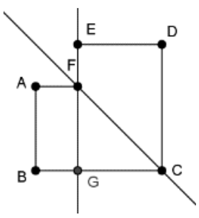
15. La figura a fianco rappresenta un cartoncino in cui tutti gli angoli convessi sono retti. Il cartoncino deve essere tagliato lungo il suo asse di simmetria. Le misure dei lati del cartoncino sono numeri interi, inoltre AF misura 1 e il segmento CF misura $\sqrt{8}$. Quanto vale l'area del cartoncino? Risposta 8



Soluzione 1 - L'unico asse di simmetria della figura è la retta CF. Tracciate da F le perpendicolari FG e FH rispettivamente a BC e DC, si ottiene il quadrilatero FGCH che, per la simmetria, è un quadrato con diagonale $\sqrt{8}$ = $2\sqrt{2}$ e lato 2. Ne segue che $\overline{AB} = \overline{FG} = \overline{CG} = 2$; $\overline{CD} = \overline{BC} = \overline{BG} + \overline{CG} = 1 + 2 = 3$. Allora si ha: $Area\ (ABCDEF) = Area\ (ABGF) + Area\ (GCDE) = 2 * 1 + 3 * 2 = 8$.



Soluzione 2 – L'unico asse di simmetria della figura è la retta CF. La figura è la somma di due trapezi rettangoli uguali. Le basi di uno dei trapezi sono AF e BC. Tracciata la perpendicolare FG a BC, poniamo $\overline{FG} = x$ e $\overline{CG} = y$. Per il teorema di Pitagora applicato al triangolo FGC si ha $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{8}$. La somma dei quadrati di due numeri interi può essere uguale a 8 solo se i numeri sono entrambi uguali a 2. Ne



segue x = y = 2 e $\overline{AB} = \overline{FG} = \overline{CG} = 2$; $\overline{BC} = \overline{BG} + \overline{CG} = 1 + 2 = 3$. Pertanto, si ha: $Area(ABCF) = \frac{1}{2}(1+3)2 = 4$ e l'area del cartoncino vale 8.