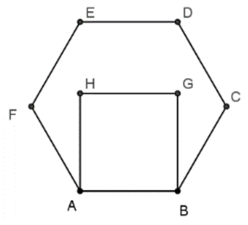
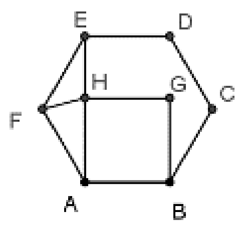
Etniade Team Cup
Allenamento del 1 febbraio 2021



1. Il quadrato ABGH è interno all'esagono regolare ABCDEF. Quanto vale, in gradi, l'angolo $\widehat{EHF}$? Risposta 105.

<u>Soluzione</u> – L'angolo $\widehat{EFA}$ è 120°, perché è angolo interno di un esagono regolare. Ne segue che $\widehat{FEA} = \widehat{EAF} = 30°$, perché angoli alla base del triangolo isoscele EFA. Di conseguenza la diagonale AE dell'esagono è perpendicolare sia ad AB che a ED, quindi H$\in$AE. Anche il triangolo FAH è isoscele e i suoi angoli alla base $\widehat{AFH}$ e $\widehat{FHA}$ valgono entrambi 75°. Allora si ha: $\widehat{EHF} = 180° - 75° = 105°$.

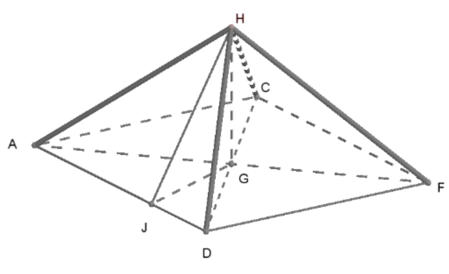


2. Scrivi la somma delle cifre del risultato della seguente divisione 999988887777666655554444333322221111 : 1111. Risposta 45.

<u>Soluzione</u> – La prima cifra del quoziente è 9 e si ottiene abbassando le prime quattro cifre uguali a 9. Abbassando di seguito, una ad una, le seguenti quattro cifre si ottengono le successive cifre del quoziente: tre 0 e un 8. Questa stessa sequenza si ottiene per ciascuno dei successivi gruppi di quattro cifre uguali, con l'unica cifra significativa che diminuisce di una unità rispetto al gruppo precedente, fino ad arrivare alla cifra 1. In definitiva il risultato della divisione sarà 900080007000600050004000300020001. La somma delle cifre è pertanto 45.

3. Una tenda ha la forma di una piramide retta e la sua base è un rombo. L'altezza della tenda è di 3,2 m e le diagonali della base sono 8 m e 6 m. Qual è la superficie esterna della tenda in m^2? Risposta 40.

<u>Soluzione</u> – Il lato del rombo misura 5 perché è ipotenusa di un triangolo rettangolo i cui cateti misurano 3 e 4. La misura dell'altezza relativa a tale ipotenusa è $\overline{GJ} = \frac{4 \cdot 3}{5} = 2{,}4$. Nel triangolo rettangolo HGJ, per il teorema di Pitagora, si ha $\overline{HJ} = \sqrt{2{,}4^2 + 3{,}2^2} = 4$. L'area di uno di questi triangoli è Area(AHD)=$\frac{1}{2}5 \cdot 4 = 10$.
Pertanto l'area della superficie esterna = $4 \cdot 10 = 40$.



4. In un liceo scientifico ciascuno studente sceglie di studiare una sola lingua tra il francese o l'inglese. Ogni 450 studenti, 90 scelgono il francese. Se tutti gli studenti del liceo sono 1200, quanti di loro studiano inglese. Risposta 960.

<u>Soluzione</u> – La percentuale degli studenti che hanno scelto il Francese vale $\frac{90}{450}$ = $\frac{1}{5}$ = 20%. Ne segue che la percentuale di studenti che studiano l'Inglese è l'80% e il loro numero è $\frac{80}{100} \cdot 1200$ = 960.

5. Se una diagonale congiunge 2 vertici non appartenenti allo stesso spigolo, quante diagonali si possono tracciare nel solido a fianco? Risposta 20.

Soluzione – Le diagonali del prisma sono 4; le diagonali che uniscono il vertice della piramide con i 4 vertici della base inferiore sono 4; le diagonali di ciascuna faccia del prisma sono 2, ovvero, in totale, $2 \cdot 6 = 12$.
Pertanto le diagonali che si possono tracciare sono $12 + 4 + 4 = 20$.

6. In un'urna sono stati inseriti dei dischetti su ciascuno dei quali è scritto un numero uguale alla potenza quarta dei numeri interi positivi minori di 91. Detta p la probabilità che, preso a caso un numero dall'urna, la sua ultima cifra sia 6, quanto vale 100p? Risposta 40.

Soluzione – Consideriamo la tabella a fianco, dove sono riportati nella prima riga l'ultima cifra di n e nella seconda l'ultima cifra di n^4. Tra i primi 10 numeri 4 potenze finiscono con 6, dunque tra i primi 90 numeri 36 finiscono per 6. Ne segue che la probabilità di pescare una potenza che finisce per 6 è p= $\frac{36}{90} = \frac{2}{5} = 0{,}4$ e 100p vale 40.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
n^4	1	6	1	6	5	6	1	6	1	0

7. Il volume di un solido si trova applicando la seguente formula: $V = a^3 + 2a^2 - 625a - 1250$, dove *a*, intero positivo, è la misura di uno spigolo. Quanto vale il volume del più piccolo di tali solidi? Risposta 1428.

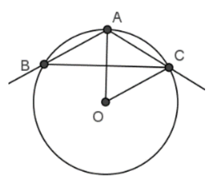
Soluzione – Scomponendo in fattori si ha:
$$V = a^3 + 2a^2 - 625a - 1250 = (a + 2)(a^2 - 625) = (a + 2)(a + 25)(a - 25).$$
V e *a* sono rispettivamente volume e misura dello spigolo, quindi numeri entrambi positivi. Perché *V* sia positivo, il fattore $(a - 25)$ deve esserlo anche, cioè *a* > 25. Dunque, il volume più piccolo si ha per l'intero a = 26. Pertanto, V_{26} = $(26 + 25)(26 - 25)(26 + 2) = 1428$.

8. La differenza fra i quadrati di due numeri consecutivi è 2021. Quanto vale il più piccolo dei due numeri? Nel triangolo isoscele ABC i lati uguali, AB e AC, sono lunghi 3 dm e l'angolo BAC vale 120°. Quanto misura, in cm, il raggio della circonferenza circoscritta? Risposta 1010.

Soluzione – Siano n e $n + 1$ i due numeri consecutivi. Si ha $(n + 1)^2 - n^2 = (n + 1 - n)(n + 1 + n) = 2n + 1 = 2021,$ da cui $n = 1010$ e $n + 1 = 2011$. Il più piccolo è 1010.

9. Nel triangolo isoscele ABC i lati uguali, AB e AC, sono lunghi 3 dm e l'angolo BAC vale 120°. Quanto misura, in cm, il raggio della circonferenza circoscritta? Risposta 30.

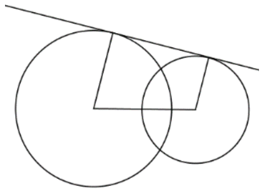
Soluzione – Considerata la circonferenza di centro O circoscritta al triangolo ABC, l'angolo $\widehat{BAC}$ è uno degli angoli dell'esagono regolare di lato AC inscritto nella circonferenza, dunque il triangolo AOC è equilatero. Ne segue che il raggio OC della circonferenza circoscritta misura, in cm, 30.

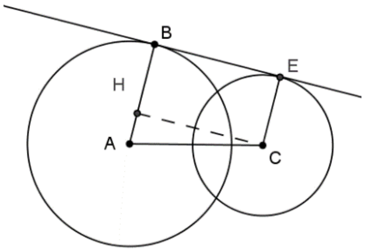


10. Considera tutte le frazioni del tipo $\frac{n-100}{n}$, dove *n* è un intero positivo, e calcola il loro prodotto per *n* compreso tra 1 e 200. Risposta 0.

Soluzione – Nessun denominatore è nullo e il numeratore della centesima frazione è 0. Ne segue che il prodotto delle prime 200 frazioni è 0.

11. Due circonferenze secanti sono tangenti ad una retta (vedi figura). Se la distanza fra i centri è 50 cm e la distanza fra i punti di tangenza è 40 cm, di quanti mm il raggio maggiore supera il minore? Risposta 300.



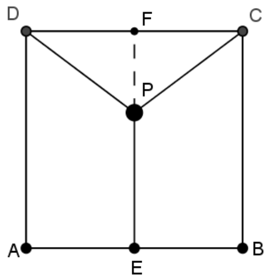


Soluzione – Considerato il triangolo rettangolo che si forma proiettando il centro C della circonferenza più piccola sul raggio dell'altra circonferenza, si ha che la differenza tra i due raggi, $\overline{\mathrm{AH}} = \mathrm{R} - \mathrm{r}$, per il teorema di Pitagora, vale $\mathrm{R} - \mathrm{r} = \sqrt{50^2 + 40^2} \; = 30$; si ha $30\mathrm{cm} = 300\mathrm{mm}$.

12. In un sacchetto ci sono 8 biglie numerate da 1 a 8. Andrea, Benedetta, Claudia e Dario, pescano 2 biglie ciascuno senza rimetterle nel sacchetto. Qual è la probabilità che la somma dei numeri sulle due biglie pescate da ciascun ragazzo sia uguale per tutti? Scrivi le prime quattro cifre decimali. Risposta 0095 .

Soluzione – I numeri su ciascuna delle 8 biglie sono 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8 e hanno per somma 36. Quindi ciascuna delle 4 coppie di biglie deve dare somma 9; le sole coppie possibili sono: 1 e 8, 2 e 7, 3 e 6, 4 e 5. Indichiamo con x_A, x_B, x_C, x_D il numero segnato sulla prima biglia estratta rispettivamente da Andrea, Benedetta, Claudia e Dario. Qualunque sia x_A, la probabilità che sulla seconda ci sia segnato il numero che sommato a x_A dia 9 è $\frac{1}{7}$. La probabilità che sulla seconda ci sia segnato il numero che sommato a x_B dia 9 è $\frac{1}{5}$. La probabilità che sulla seconda biglia ci sia segnato il numero che sommato a x_C dia 9 è $\frac{1}{3}$. L'estrazione di Dario è obbligata. La probabilità che i quattro eventi si verifichino contemporaneamente è P = $\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{105} = 0{,}0095$.

13. All'interno di una cornice quadrata di lato 32 cm si vuole individuare un punto P, ugualmente distante da 2 vertici appartenenti allo stesso lato e dal lato opposto, in cui inserire un gancio per appendervi un piccolo oggetto prezioso. Quanto vale, in cm, ciascuna delle tre distanze uguali? Risposta 20.



Soluzione – Indichiamo con D e C i vertici di uno stesso lato e con AB il lato opposto ad esso. Poiché P è ugualmente distante da D e da C, appartiene all'asse FE dei segmenti DC e AB. Detta x la misura dei segmenti uguali PE, PC e PD, per il teorema di Pitagora applicato al triangolo DFP si ha $\overline{DP}^2 = \overline{DF}^2 + \overline{FP}^2$, cioè $x^2 = 16^2 + (32 - x)^2$ da cui si ricava $x = 20$.

14. Quattro bambini bevono 18 l di latte in 9 giorni. Quanti giorni impiegano 8 bambini a bere 28 litri di latte? Risposta 7.

Soluzione – Se quattro bambini bevono 18 l di latte in 9 giorni, in un giorno ne bevono 2 l e ogni bambino ne beve mezzo litro. Si ha allora che otto bambini bevono 4 l di latte al giorno e per consumarne 28 litri impiegano 7 giorni.

15. Se la somma di 8 angoli di un poligono convesso di 9 lati vale al più 1150°, quanto vale almeno, in gradi, il nono angolo? Risposta 110.

<u>Soluzione</u> – La somma degli angoli interni di un ennagono è 1260°, ne segue che se la somma di 8 angoli è al più 1150°, il settimo angolo deve essere almeno 110°.