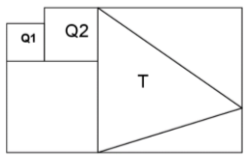
MIDDLE ETNIADE TEAM CUP
Allenamento del 14 dicembre 2020

- *Per ogni problema la risposta è un intero compreso tra 0000 e 9999.*
- *Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.*
- *Se la quantità richiesta è un numero intero maggiore di 9999, si indichi 9999.*
- *Se la quantità richiesta non è un numero intero, dove non indicato diversamente, si indichi la sua parte intera.*

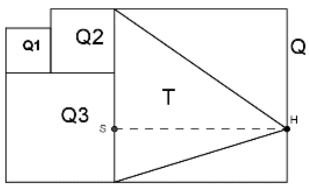
1. Nel triangolo ABC l'angolo di vertice A è il doppio dell'angolo di vertice B e l'angolo di vertice C è il triplo dell'angolo di vertice B. Quanto misura in gradi l'angolo C?
   Risposta: 90
   $\hat{A} = 2\,\hat{B};\ \hat{C} = 3\,\hat{B};\ inoltre\ \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°;\ ovvero\ \widehat{2B} + \hat{B} + \widehat{3B} = 180°$ *e quindi*
   $6\hat{B} = 180° \qquad \hat{B} = 30° \qquad \hat{C} = 3\hat{B} = 90°$

2. Considera tutti i numeri interi da 1 a 1000. Somma tutti i numeri pari e sottrai tutti i numeri dispari. Quale numero ottieni?
   Risposta: 500
   Se abbiniamo ad ogni numero pari il numero dispari che lo precede si formano 500 coppie. Per ciascuna coppia la differenza è 1 e, per le 500 coppie, si ottiene un totale di 500.

3. Tutti i poligoni convessi visibili nella figura a fianco sono quadrati o triangoli. Si sa che l'area di Q1 vale 64 cm^2 e l'area di Q2 vale 81 cm^2. Quanto vale in cm^2 l'area del triangolo T?

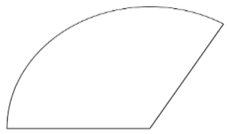


   Risposta: 338
   Se l'area di Q1 vale 64 cm^2 e l'area di Q2 vale 81 cm^2, il lato di Q1 vale 8 cm e quello di Q2 vale 9 cm. Ne segue che il lato di Q3, che coincide con la somma dei lati di Q1 e Q2, vale 17 cm e il lato di Q, che coincide con la somma dei lati di Q2 e Q3 vale 26 cm. Il triangolo T ha area pari a $26 \cdot \frac{26}{2}$ *cm^2 = 338 cm^2.*



4. Uno scatolone contiene due scatole, ciascuna delle quali contiene quattro scatole più piccole, che a loro volta contengono ciascuna otto scatoline. Quante scatole ci sono in tutto?
   Risposta: 75
   $1 + 2 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 4 \cdot 8 = 1 + 2 + 8 + 64 = 75$

5. Per realizzare il cappello della fata Turchina è stato ritagliato da un cartoncino colorato un settore circolare di ampiezza 120° e raggio 30 cm. Ripiegato il cartoncino in modo da far coincidere i due raggi, sigillandoli con lo scotch si ottiene un cono. Quanto vale, in cm^2, la sua superficie laterale?



Risposta: 942

La misura della superficie laterale del cono coincide con l'area del cartoncino ritagliato, cioè del settore circolare. Poiché questo ha ampiezza 120° la sua area, in cm^2, vale $\frac{1}{3}\pi \cdot 30^2 = 300 \cdot \pi$, la cui parte intera è 942.

6. Ad un bar alcuni ragazzi ordinano tutti la stessa bibita, che costa 2,70 euro. Al momento di pagare, però, uno si accorge di essere senza soldi e altri due hanno solo 1,50 euro a testa. Ciascuno degli altri ragazzi sborsa allora 4,40 euro. Quanti sono i ragazzi?

Risposta: 6

I tre ragazzi in difficoltà, che avrebbero dovuto pagare in tutto 8,1 euro, ne versano solo 3 e i restanti 5,1 euro vanno divisi fra i ragazzi paganti. Ciascuno di questi ultimi ha pagato in più 4,4 – 2,7 = 1,7 euro e il loro numero si ottiene dividendo quanto non pagato i ragazzi in difficoltà per quanto è stato pagato in più da chi ha compensato, cioè 5,1 : 1,7 = 3. Quindi in totale i ragazzi sono 3 + 3 = 6.

7. Se la somma di 6 angoli di un poligono convesso di 7 lati misura 870°, quanti gradi misura il settimo angolo?

Risposta: 30

Se uniamo i 7 vertici con un qualsiasi punto interno a un ettagono, otteniamo 7 triangoli; allora la somma degli angoli interni di un ettagono è 7·180° - 360° = 900°. Ne segue che se la somma di 6 angoli è 870°, il settimo angolo misura 30°.

8. Due dadi vengono lanciati su un tavolo. Uno dei dadi ha due facce nere, due rosse e due gialle mentre l'altro ne ha una rossa, una gialla, una bianca e tre nere. Detta p la probabilità che entrambi atterrino mostrando lo stesso colore, quanto vale 900p?

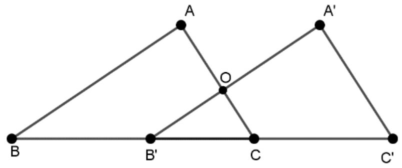
Risposta: 250

Indichiamo le facce in base al loro colore con N, R, G, B.

	N	*N*	*R*	*R*	*G*	*G*
R	*RN*	*RN*	***RR***	***RR***	*RG*	*RG*
G	*GN*	*GN*	*GR*	*GR*	***GG***	***GG***
B	*BN*	*BN*	*BR*	*BR*	*BG*	*BG*
N	***NN***	***NN***	*NR*	*NR*	*NG*	*NG*
N	***NN***	***NN***	*NR*	*NR*	*NG*	*NG*
N	***NN***	***NN***	*NR*	*NR*	*NG*	*NG*

I casi possibili sono $6 \cdot 6 = 36$. I casi favorevoli, indicati in rosso, sono 10. Pertanto la probabilità p, che entrambi i dadi atterrino mostrando lo stesso colore, vale $\frac{10}{36}$ e 900 p = 900·$\frac{10}{36}$ = 250.

9. Un triangolo ABC e il suo traslato A′B′C′ sono disposti in modo da avere le basi BC e B′C′ parzialmente sovrapposte (vedi figura). L'angolo di vertice B misura a 40° e quello di vertice C′ misura 60°. Quanti gradi misura l'angolo AOB′?



Risposta: 100

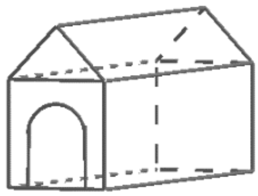
Poiché i due triangoli sono uno il traslato dell'altro, essi sono uguali, da cui $\hat{B} = \widehat{OB'C} = 40°$ *e* $\widehat{C'} = \widehat{OCB'} = 60°$. *Ne segue* $\widehat{B'OC} = 180° - 40° - 60° = 80°$ *e* $\widehat{AOB'} = 180° - 80° = 100°$

10. Alla festa di compleanno Marco ha invitato i suoi amici. Al momento di scegliere il dolce fra i nove possibili, i ragazzi prendono la bizzarra decisione di selezionare ciascuno un assaggio di due diversi dolci. Sapendo che nessuno sceglie la stessa coppia di dolci e che nessuna delle possibili coppie viene scartata, quanti sono i ragazzi?

Risposta: 36

Il primo dolce può essere scelto fra i 9 disponibili, il secondo fra gli otto rimasti per un totale di 9x8 = 72 possibilità. In questo modo però ogni coppia di dolci viene conteggiata due volte per cui bisogna dividere 72 per due. Considerato che nessuno sceglie la stessa coppia di dolci e che nessuna delle possibili coppie viene scartata, si ha che il numero dei ragazzi è 72/2 = 36 .

11. Su un capannone a forma di parallelepipedo si realizza un tetto, non sporgente, a due spioventi uguali che si incontrano formando un angolo retto. Il capannone è largo 4 m e profondo 8 m. Si vuole ricoprire il tetto con delle tegole. Quanta superficie, in dm^2, devono ricoprire le tegole? (Approssima $\sqrt{2}$ con 1,41)



Risposta 4512

La parte alta della facciata è descritta da un triangolo rettangolo isoscele la cui base misura 4. Ne segue che i cateti misurano ciascuno $2\sqrt{2}$ *m. Il tetto risulta formato, allora, da due rettangoli i cui lati misurano* $2\sqrt{2}$ *m e 8 m. La superficie cercata è la somma delle superfici di tali rettangoli. L'area dei due rettangoli è quindi* $2 \cdot \left(2\sqrt{2} \cdot 8\right)\, m^2 = 45{,}12\ m^2 = 4512\ dm^2$.

12. Il medico ha prescritto a Luca una cura ricostituente. Luca deve prendere pillole di tre tipi diversi, a differenti intervalli di tempo: una rossa ogni ora, una bianca ogni ora e 40 minuti, una gialla ogni due ore e 40 minuti. All'inizio della cura Luca ha assunto le tre pillole contemporaneamente e la cura termina quando nuovamente le tre pillole saranno prese contemporaneamente. Quante pillole deve prendere in tutto?

Risposta: 82

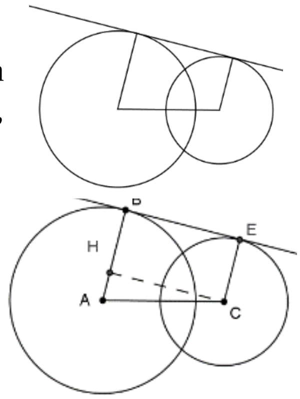
I minuti per assumere le pillole sono 60, 100 e 160 e i loro multipli. Il loro minore multiplo comune è il mcm(60,100,160) = 2400. Nei 2400 minuti Luca ha assunto 2400 : 60 = 40 pillole rosse, 2400 : 100 = 24 pillole bianche, 2400 : 160 = 15 pillole gialle, per un totale di 3 + 40 + 24 + 15 = 82 pillole, avendo considerato anche le tre pillole prese inizialmente.

13. Una moneta perfettamente regolare viene lanciata tre volte. Detta p la probabilità che atterri almeno due volte consecutive mostrando testa, quanto vale 1000p?

Risposta: 375

Indichiamo testa e croce rispettivamente con T e C. Rappresentiamo con un diagramma ad albero i casi possibili:

Gli eventi possibili sono 8: TTT, TTC, TCT, TCC, CTT, CTC, CCT, CCC. I lanci con almeno due T consecutive sono tre. Quindi p = 3/8 e 1000p = 375.



14. Due circonferenze secanti sono tangenti ad una retta (vedi figura). Se la distanza fra i centri è 50 cm e la distanza fra i punti di tangenza è 40 cm, di quanti mm il raggio maggiore supera il minore?
Risposta: 300
Indichiamo con R la misura del raggio AB e con r la misura del raggio EC. Se H è la proiezione di C su AB, la differenza dei raggi richiesta è AH=AB-BH, che, per il teorema di Pitagora, vale $R - r = \sqrt{50^2 + 40^2}\ cm = 30\ cm = 300\ mm$.

15. Quale numero si deve aggiungere sia al numeratore sia al denominatore della frazione 2/5 perché essa raddoppi?
Risposta: 10
Detto n il numero da aggiungere, si ha che le frazioni $\frac{2+n}{5+n}$ *e* $\frac{2 \cdot 2}{5}$ *sono equivalenti se e solo se* $5(2+n) = 4(5+n)$ *cioè* $10 + 5n = 20 + 4n$ *da cui* $n = 10$.