

# CORSI DI STUDIO IN MATEMATICA E IN MATEMATICA PER LE APPLICAZIONI

## PROGRAMMA DEL CORSO DI ANALISI MATEMATICA 2

Anno Accademico 2001-02

(Prof. G. Emmanuele)

### **1-Integrale indefinito.**

Funzioni dotate di primitive e funzioni prive di primitive. Definizione di integrale indefinito. Rappresentazione di tutte le primitive. Proprietà dell'integrale indefinito\*: omogeneità, distributività. Integrazione per parti. Integrazione per sostituzione.

### **2-Integrale di Riemann.**

Definizione di integrale di Riemann. Funzioni costanti e funzione di Dirichlet. Criterio di integrabilità di Riemann \*. Integrabilità di funzioni continue e di funzioni monotone. Integrabilità di funzioni generalmente continue e limitate \*. Proprietà dell'integrale di Riemann\*: omogeneità, distributività, additività, positività, monotonia rispetto alla funzione integranda e rispetto all'intervallo di integrazione, integrabilità di  $\phi \circ f$  con  $\phi$  lipschitziana ed  $f$  integrabile, integrabilità di  $|f|$ ,  $f^n$ , integrabilità di  $fg$ ,  $\max(f, g)$ ,  $\min(f, g)$ ,  $1/f$ . Assoluta integrabilità \*. Teorema della Media. Integrale definito: definizione e proprietà\*. Funzione integrale. Teorema di Torricelli-Barrow.

### **3-Integrali impropri.**

Integrali impropri di 1<sup>a</sup> e di 2<sup>a</sup> specie. Teoremi di confronto e corollari \*. Assoluta integrabilità ed integrabilità: teoremi e controesempi.

### **4-Serie numeriche.**

Definizione di serie numerica. Criterio di convergenza di Cauchy. Serie armonica. Serie geometrica. Serie a termini di segno costante e loro regolarità. Criterio del Confronto e corollario. Criterio del Rapporto e corollario. Criterio della Radice e corollario. Criterio di Raabe e corollario. Criterio di condensazione di Cauchy \*. Serie a termini di segno alternato. Criterio di Leibnitz e maggiorazione dell'errore.

### **5-Successioni di funzioni.**

Definizione di successione di funzioni. Convergenza puntuale ed uniforme. esempi. Condizione caratteristica per la convergenza uniforme\*. Criteri di Cauchy per la convergenza puntuale ed uniforme\*. Teorema dello scambio dei limiti. Continuità della funzione limite. Integrabilità della funzione limite\*. Passaggio al limite sotto il segno di integrale per l'integrale di Riemann. Scambio di limite e derivata\*. Passaggio al limite sotto il segno di integrale per l'integrale improprio\*. Teorema di Dini\*. Teorema di Polya\*.

## **6-Serie di funzioni.**

Serie di funzioni reali di variabile reale. Convergenza semplice, uniforme, assoluta e totale. Integrazione per serie e derivazione per serie. Serie di potenze reali. Raggio di convergenza e intervallo di convergenza. Teorema di Abel-Stolz\*. Calcolo del raggio di convergenza. Serie di potenze e serie delle derivate. Serie di Taylor o Mac Laurin. Esempio di funzione di classe  $C^\infty$ , non analitica\*. Condizioni sufficienti per la analiticità. Sviluppi notevoli.

## **7-Spazi metrici.**

Definizione di spazio metrico ed esempi. Intorni sferici. Punti interni, esterni, di accumulazione, di frontiera e isolati. Insiemi aperti e insiemi chiusi. Insiemi limitati. Metriche equivalenti. Successioni in spazi metrici e loro limiti. Spazi metrici completi. Esempi. Funzioni continue. Sequenziale compattezza. Teorema di Bolzano-Weierstrass\*. Funzioni uniformemente continue e Teorema di Cantor. Teorema di Weierstrass. Connessione. Connessi in  $\mathbb{R}$ . Teorema di Esistenza degli Zeri. Connessione per spezzate. Esempi e controesempi. Aperti connessi in  $\mathbb{R}^n$ .\*

## **3-Funzioni da $X \subset \mathbb{R}^n$ ad $\mathbb{R}^m$ .**

Limiti di successioni e di funzioni in  $\mathbb{R}^n$ . Derivate direzionali e derivate parziali. Differenziabilità. Teorema del Differenziale Totale\*. Confronto delle precedenti nozioni (con esempi). Differenziabilità di funzioni composte\*. Derivazione di funzioni composte\*. Curve regolari e retta tangente. Significato geometrico della differenziabilità e della derivabilità direzionale. Derivate e differenziali successivi\*. Invertibilità dell'ordine di derivazione (per funzioni dotate di una derivata mista continua e per funzioni differenziabili due volte)\*. Formula di Taylor (con resto di Peano e resto di Lagrange)\*. Punti di estremo relativo. Teorema di Fermat. Forme quadratiche. Autovalori. Caratterizzazione delle forme quadratiche definite attraverso il segno degli autovalori\*. Teorema di Cartesio\*. Matrici di Nord-Ovest\*. Matrice Hessiana. Metodo per la ricerca dei punti di estremo (condizioni necessarie\* e condizioni sufficienti).

Gli appunti del programma svolto (e molto di più!) possono essere trovati su internet, alla homepage del Prof. Emmanuele, all'indirizzo seguente

<http://www.dmi.unict.it/~emmanuele>

Le dimostrazione degli argomenti contrassegnati con asterisco possono essere omesse.