

CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA
PROGRAMMA DEL CORSO DI ANALISI MATEMATICA II
Anno Accademico 1998-99

(Prof. G. Emmanuele)

Spazi metrici, spazi normati, spazi prehilbertiani. Definizione di spazio metrico ed esempi. Intorni sferici ed intorni. Punti interni, esterni, di accumulazione, di frontiera e isolati. Insiemi aperti e insiemi chiusi. Insiemi limitati. Metriche equivalenti. Successioni in spazi metrici e loro limiti. Spazi metrici completi. Contrazioni. Funzioni continue. Completamento. Compattezza, sequenziale compattezza e totale limitatezza. Teorema di Bolzano-Weierstrass. Teorema di Borel-Heine. Funzioni uniformemente continue. Teorema di Cantor-Heine. Teorema di Weierstrass. Connessione. Teorema di Esistenza degli Zeri. Altri tipi di connessione. Definizione di spazio normato ed esempi. Applicazioni lineari. Caratterizzazione della continuità delle applicazioni lineari. Norma di operatori. Spazi normati di dimensione finita e loro caratterizzazioni. Spazi prehilbertiani ed esempi. Identità del parallelogramma. Teorema dell'elemento di minima distanza. Teorema della somma diretta. Teorema della proiezione. Teorema di Riesz.

Funzioni da $X \subset \mathbb{R}^n$ ad \mathbb{R}^m .

Norma e prodotto scalare in \mathbb{R}^n . Alcune osservazioni sul calcolo dei limiti. Derivate direzionali e derivate parziali. Differenziabilità. Teorema del Differenziale Totale. Confronto delle precedenti nozioni (con esempi). Differenziabilità di funzioni composte. Derivazione di funzioni composte. Significato geometrico della differenziabilità e della derivabilità direzionale. Derivate e differenziali successivi. Invertibilità dell'ordine di derivazione. Formula di Taylor (con resto di Peano e resto di Lagrange). Funzioni omogenee. Teorema di Eulero. Punti di estremo relativo. Teorema di Fermat. Forme quadratiche. Autovalori. Caratterizzazioni delle forme quadratiche definite attraverso il segno degli autovalori. Caratterizzazioni delle forme quadratiche definite il calcolo dei determinanti delle matrici di Nord-Ovest*. Matrice Hessiana. Metodo per la ricerca dei punti di estremo (condizioni necessarie e condizioni sufficienti). Derivabilità nei punti di frontiera e Teorema di Whitney*.

Funzioni convesse.

Definizione di funzione convessa (e concava). Locale limitatezza superiore, continuità. Locale lipschitzianità di funzioni convesse. Caratterizzazione della convessità per funzioni differenziabili una volta. Caratterizzazione della convessità per funzioni differenziabili due volte. Iperpiano di appoggio e caratterizzazione della convessità *. Esistenza del gradiente in un punto e differenziabilità*. Esistenza del gradiente in un aperto convesso e sua continuità*.

Funzioni implicite. Teoremi di inversione. Estremi vincolati.

Funzioni implicite. Teorema del Dini per funzioni reali di più variabili reali. Derivabilità parziale della funzione implicita nel caso scalare. Teorema del Dini per sistemi di funzioni reali di più variabili reali. Derivabilità parziale della funzione implicita nel caso vettoriale. Teorema di inversione locale. Un Teorema di Inversione globale*. Punti di estremo vincolato (vincoli bilaterali e vincoli unilaterali) e ricerca dei punti di estremo vincolato (moltiplicatori di Lagrange e di Kuhn-Tucker; condizioni necessarie e condizioni sufficienti).

Teoria della misura secondo Peano-Jordan.

Misurabilità di insiemi elementari (insieme vuoto, rettangoli superiormente semiaperti o r.s.s. e plurirettangoli). Coerenza delle definizioni. La differenza di due r.s.s. è un plurirettangolo. Una unione finita di r.s.s. è un plurirettangolo. Unione, intersezione e differenza di plurirettangoli. Proprietà della misura dei plurirettangoli. Misurabilità di insiemi limitati. Unione, intersezione e differenza di insiemi limitati e misurabili. Proprietà della misura di insiemi limitati e misurabili. Criterio di misurabilità. Misurabilità dell'interno e della chiusura di un insieme limitato e misurabile. La misurabilità di un insieme equivale alla misurabilità della frontiera dell'insieme (con frontiera di misura nulla). Misurabilità di insiemi non limitati. Proprietà degli insiemi misurabili secondo Peano-Jordan e della misura di Peano-Jordan. Successioni di insiemi e misura. Misura di insiemi prodotto. Esempi di insiemi non misurabili.

Integrale di Riemann.

Integrale di Riemann. Proprietà delle funzioni integrabili e dell'integrale. Confronto fra la definizione data in Analisi Matematica I e la presente definizione. Integrabilità di funzioni continue a meno di insiemi di misura nulla. Teorema della Media. Integrabilità e misurabilità del rettangoloide. Misurabilità di domini normali. Funzioni a scala e loro integrale. Teorema di riduzione e corollari. Teorema di cambiamento di variabili*. Coordinate polari, cilindriche, sferiche. Altri cambiamenti di variabili. Teorema di Guldino. Integrali impropri. Confronto con l'integrale di Riemann. Confronto con gli integrali impropri dell'Analisi Matematica I. Proprietà. Invadenza di insiemi. Integrali dipendenti da parametri. Teoremi di continuità e derivabilità in un rettangolo. Altri Teoremi di continuità e derivabilità.

Equazioni differenziali.

Sistemi di equazioni differenziali. Problema di Cauchy ed Equazione integrale di Volterra. Teoremi di esistenza ed unicità in piccolo ed in grande. Teorema di Ascoli-Arzelà. Teoremi di esistenza in piccolo ed in grande. Metodi risolutivi di alcuni tipi di equazioni differenziali (Equazioni a variabili separabili. Equazioni lineari del primo ordine. Equazioni di Bernoulli. Equazioni a coefficiente omogeneo. Equazione di Eulero. Altri tipi). Prolungabilità di soluzioni. Dipendenza continua. Sistemi di equazioni lineari. Spazio delle soluzioni. Sistemi di equazioni lineari a coefficienti costanti. Matrice esponenziale. Caso della matrice dei

coefficienti diagonalizzabile. Applicazione dei risultati generali allo studio delle equazioni differenziali lineari di ordine n a coefficienti costanti.

Curve ed integrali curvilinei. Curve regolari. Retta tangente. Lunghezza. Curve regolari a tratti. Integrali curvilinei. Forme differenziali lineari. Integrabilità di forme differenziali lineari. Omotopie. Semplice connessione e forme chiuse. Teorema di Gauss-Green.

Superfici ed integrali superficiali. Superfici regolari. Piano tangente. Area di una superficie. Integrali superficiali. Forme differenziali bilineari. Teorema di Stokes.

Testi consigliati:

- 1) C.D.Pagani, S.Salsa, **Analisi Matematica, vol. 1, Masson 1991**
- 2) C.D.Pagani, S.Salsa, **Analisi Matematica, vol. 2, Masson 1991**

Durante le lezioni saranno anche distribuiti degli **Appunti** ad integrazione dei libri di testo consigliati.