UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA – A.A.2017-18

Dipartimento di Matematica e Informatica

Corso di laurea magistrale in Matematica

Esercitazione di **Equazioni a Derivate Parziali**
svolta il giorno **10 Aprile 2018.**

Esercizio 1. Sia $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Dimostrare che

$$\lim_{R\to 0} \fint_{B_R(0)} u(y)\, dy = u(0).$$

Esercizio 2. Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ e $d : \Omega \to \mathbb{R}$ la funzione definita dalla legge $d(x) = \mathrm{dist}(x, \partial\Omega)$. Dimostrare che d è Lipschitziana e dedurre che, per ogni $\varepsilon > 0$, l'insieme $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega \ : \ d(x) > \varepsilon\}$ è aperto.

Esercizio 3. Siano X un sottoinsieme arbitrario di $\mathbb{R}^n$ e $\varepsilon > 0$. Provare che

$$X + B_\varepsilon(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \mathrm{dist}(x, X) < \varepsilon\}$$

è aperto.

Esercizio 4. Dimostrare che la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita dalla legge

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{1-|x|^2}\right) & \text{se } |x| < 1 \\ 0 & \text{se } |x| \geq 1 \end{cases}$$

appartiene alla classe $C_0^\infty(\mathbb{R})$.

Esercizio 5. Dimostrare che $C_0^\infty(\mathbb{R})$ è denso in $L^1(\mathbb{R})$ rispetto alla norma

$$\|f\| = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx$$

Esercizio 6. Provare che, se u è una funzione di classe $C^2(\mathbb{R}^n)$, risulta

$$\lim_{r\to 0} \frac{2n}{r^2} \left[u(x_0) - \fint_{\partial B_r(x_0)} u(x) d\sigma(x) \right] = -\Delta u(x_0)$$

dove x_0 è un punto di $\mathbb{R}^n$ fissato ad arbitrio.