UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA – A.A.2017-18

Dipartimento di Matematica e Informatica

Corso di laurea magistrale in Matematica

Esercitazione di **Equazioni a Derivate Parziali**
svolta il giorno **28 Marzo 2018**

Esercizio 1. Siano p, p' due numeri verificanti le condizioni $1 \leq p, p' < +\infty$ e $1/p + 1/p' = 1$.

Dimostrare che

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'} \qquad \forall a, b \geq 0$$

e poi dedurre la disuguaglianza di Hölder.

Esercizio 2. Dopo avere giustificato le equazioni della trasformazione in coordinate polari in $\mathbb{R}^4$, calcolare il determinante Jacobiano della trasformazione. Generalizzare i risultati trovati alle dimensioni superiori.

Esercizio 3. Sia E un insieme misurabile secondo Lebesgue di misura finita. Se $1 \leq p \leq q \leq +\infty$ provare che

$$\|f\|_p \leq |E|^{1/p-1/q} \|f\|_q$$

Esercizio 4. Sia E un insieme misurabile secondo Lebesgue di misura finita. Provare che

$$\lim_{p \to +\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$$

per ogni $f \in L^\infty(E)$.

Esercizio 5. Siano f, g, h funzioni sommabili in $\mathbb{R}^n$. Verificare le seguenti relazioni

1. $f * g = g * f$;
2. $f * (g * h) = (f * g) * h$;
3. $f * (g + h) = f * g + f * h$.

Esercizio 6. Sia $K(s,t)$ una funzione definita in $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ e non negativa tale che

$$K(\lambda s, \lambda t) = \lambda^{-1} K(s,t) \qquad \forall s,t \geq 0\,, \lambda > 0\,.$$

Supponiamo inoltre che esista $p \geq 1$ tale che

$$\gamma = \int_0^{+\infty} K(1,t)\, t^{-1/p}\, dt < +\infty\,.$$

Posto infine

$$(Tf)(s) = \int_0^{+\infty} K(s,t) f(t)\, dt$$

provare che

$$\|Tf\|_p \leq \gamma\, \|f\|_p \qquad \forall f \geq 0\,,\ f \in L^p\,.$$