

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA – A.A.2024-25

Dipartimento di Matematica e Informatica – Corso di laurea triennale in Matematica

Prova di **Analisi Matematica II** assegnata il giorno 22 dicembre 2025.

Tempo a disposizione: **180 minuti**. **NON È PERMESSO** consultare libri, appunti o formulari. È altresì vietato l'uso di qualsiasi tipo di **DISPOSITIVO ELETTRONICO** pena l'**ANNULLAMENTO DELLA PROVA**.

Teoria

Domanda di teoria 1. Dare la definizione di raggio di convergenza di una serie di potenze e presentare almeno un esempio.

Domanda di teoria 2. Dare la definizione di funzione implicita e presentare almeno un esempio.

Pratica - Prima Parte

Esercizio 1. Studiare la convergenza puntuale della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left(\frac{\sin x}{2 + \cos x} \right)^n$$

precisando tutti gli intervalli nei quali la convergenza risulta uniforme ed infine calcolarne la somma.

Esercizio 2. Calcolare gli eventuali estremi relativi e gli estremi assoluti della funzione

$$f(x, y) = (x^3y^2 - x^4y^2 - x^3y^3)^2$$

nell'insieme

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x + y \leq 1\}.$$

Pratica - Seconda Parte

Esercizio 3. Determinare tutte le soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = xy + x\sqrt[5]{y} \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

precisando per ciascuna di esse l'intervallo in cui è soluzione.

Esercizio 4. Calcolare l'integrale $\int_T x^2 dx dy$ essendo

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1 - x^2\}.$$

Esercizio 5. Calcolare l'integrale della forma differenziale

$$\omega(x, y) = \left(\frac{x^2}{x + y^2} + 2x \log(x + y^2) \right) dx + \frac{2x^2 y}{x + y^2} dy$$

lungo la curva di parametrizzazione $\varphi : [\pi, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da $\varphi(t) = (t, t + \sin t)$.