

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA – A.A.2024-25

Dipartimento di Matematica e Informatica – Corso di laurea triennale in Matematica

Prova di **Analisi Matematica II** assegnata il giorno 24 novembre 2025.

Tempo a disposizione: **180 minuti**. **NON È PERMESSO** consultare libri, appunti o formulari. È altresì **vietato** l'uso di qualsiasi tipo di **DISPOSITIVO ELETTRONICO** pena l'**ANNULLAMENTO DELLA PROVA**.

Prima Parte

Domanda di teoria 1. Enunciare e dimostrare il teorema di Fermat.

Domanda di teoria 2. Si dia la definizione di differenziabilità e di differenziale per una funzione reale di due variabili reali e si dimostri una condizione sufficiente per la differenziabilità.

Prima Parte

Esercizio 1. Si studi la convergenza puntuale ed uniforme della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n \tan x}{1 + n^4 |\sin x|}$$

nel sottoinsieme di \mathbb{R} in cui la funzione somma risulti definita.

Esercizio 2. Determinare gli eventuali estremi relativi e gli estremi assoluti della funzione

$$f(x, y) = (x - y^2 + 25)(|x| - 5)$$

ed in seguito studiarne la restrizione al triangolo di vertici i punti $(0, 0)$, $(0, 1)$ e $(1, 1)$.

Seconda Parte

Esercizio 3. Dopo avere stabilito la sommabilità della funzione integranda calcolare

$$\int_T \frac{x^2 y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$$

essendo

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq x, x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Esercizio 4. Calcolare l'integrale

$$\int_{\gamma} -\frac{(x^2 - y^2)e^y}{(x^2 + y^2)^2} dx + \frac{x(x^2 - y^2)e^y}{(x^2 + y^2)^2} dy$$

dove γ è la spezzata di vertici $(-1, 0)$, $(1, 1/2)$, $(1, 0)$ orientata da $(-1, 0)$ verso $(1, 0)$.

Esercizio 5. Determinare le eventuali soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + \frac{y}{x} = 2\sqrt{xy} \\ y(\sqrt{2}) = 0 \end{cases}$$

precisando il più ampio intervallo in cui ciascuna di esse risulta essere soluzione.