

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA – A.A.2024-25

Dipartimento di Matematica e Informatica – Corso di laurea triennale in Matematica

Prova di **Analisi Matematica II** assegnata il giorno 22 settembre 2025.

Tempo a disposizione: **180 minuti**. **NON È PERMESSO** consultare libri, appunti o formulari. È altresì **vietato** l'uso di qualsiasi tipo di **DISPOSITIVO ELETTRONICO** pena l'**ANNULLAMENTO DELLA PROVA**.

Prima Parte

Domanda di teoria 1. Enunciare e dimostrare il teorema sul moltiplicatore di Lagrange.

Domanda di teoria 2. Enunciare e dimostrare il teorema di Schwartz.

Esercizio 1. Studiare la convergenza puntuale della serie

$$\sum_{n \geq 1} \cos^2 \frac{x}{2} (\sin x)^{n-1}, \quad x \in [-\pi, \pi],$$

e, nei casi in cui converge, calcolarne la somma.

Esercizio 2. Trovare gli eventuali estremi relativi e gli estremi assoluti della funzione

$$f(x, y) = 2x^4 + 2x^2y + 5y^2.$$

Seconda Parte

Esercizio 3. Calcolare l'integrale

$$\int_{\gamma} \frac{2x^3 - x^2 - 2xy - y}{(x^2 - y)^2} dx + \frac{-x^2 + x + y}{(x^2 - y)^2} dy$$

lungo la curva (γ, φ) di parametrizzazione

$$\varphi(t) = (t, t^3 + t^2 - 3t - 1) \quad t \in [0, 1].$$

Esercizio 4. Si stabilisca se la funzione $f(x, y, z) = x$ sia integrabile in

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 \leq x \leq 1\}$$

ed in caso affermativo si calcoli

$$\int_T x \, dx \, dy \, dz.$$

essendo

Esercizio 5. Determinare le eventuali soluzioni del problema

$$\begin{cases} y' + \frac{y}{x} + x^2 \sqrt[4]{y} = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

definite in $]0, +\infty[$.