

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA – A.A.2024-25

Dipartimento di Matematica e Informatica – Corso di laurea triennale in Matematica

Prova scritta di **Analisi Matematica II** assegnata il giorno 1 settembre 2025

Tempo a disposizione: **180 minuti**. Durante lo svolgimento **NON È PERMESSO** consultare libri, appunti o formulari. È altresì **vietato** l'uso di qualsiasi tipo di **DISPOSITIVO ELETTRONICO** pena l'**ANNULLAMENTO DELLA PROVA**.

Domanda di teoria 1. Dare la definizione di raggio di convergenza di una serie di potenze. Dimostrare poi il Teorema che caratterizza il raggio di convergenza.

Domanda di teoria 2. Dare la definizione di funzione implicita e poi dimostrare il Teorema del Dini sulle funzioni implicite.

Prima Parte

Esercizio 1. Studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \arctan\left(\frac{x^n}{n}\right) \quad x \in \mathbb{R}$$

in tutti i sottointervalli del suo campo di esistenza.

Esercizio 2. Determinare gli eventuali punti di estremo relativo e gli estremi assoluti della funzione

$$f(x, y, z) = \sqrt{|(y-x)^2 + (z-x)^3|} e^{-((x-y)^2 + (z-x)^3)^2}$$

nel suo campo di esistenza.

Seconda Parte

Esercizio 1. Si determini il flusso del campo vettoriale $\mathbf{F}(x, y, z) = (0, ye^{-x}, 0)$ attraverso la superficie

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq y\}.$$

Esercizio 2. Calcolare

$$\int_T y^2 \log(y+z) \, dx \, dy \, dz$$

dove

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x, y, z > 0, x + y + z < 1\}.$$

Esercizio 3. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{y^2}{\sqrt{1-x^2}} \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$ determinando il più ampio intervallo in cui le eventuali soluzioni sono definite.