

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA – A.A.2024-25

Dipartimento di Matematica e Informatica – Corso di laurea triennale in Matematica

Prova di **Analisi Matematica II** assegnata il giorno 7 luglio 2025.

Tempo a disposizione: **180 minuti**. **NON È PERMESSO** consultare libri, appunti o formulari. È altresì **vietato** l'uso di qualsiasi tipo di **DISPOSITIVO ELETTRONICO** pena l'**ANNULLAMENTO DELLA PROVA**.

Domanda di teoria 1. Enunciare e dimostrare il teorema di Fermat.

Domanda di teoria 2. Enunciare e dimostrare il teorema sull'inversione dell'ordine di derivazione di Schwarz in $\mathbb{R}^2$.

Prima Parte

Esercizio 1. Si studi la convergenza puntuale ed uniforme della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n \tan x}{1 + n^4 |\sin x|}.$$

Esercizio 2. Data la funzione

$$f(x, y) = (x - y^2 + 25)(|x| - 5),$$

si trovino gli eventuali estremi relativi ed assoluti.

Seconda Parte

Esercizio 1. Calcolare l'integrale

$$\int_T \frac{e^{-z}}{1 + (x^2 + 4y^2)^2} dx dy dz,$$

dove

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 1, x^2 + 4y^2 \leq 1, x, y \geq 0\}.$$

Esercizio 2. Calcolare l'integrale della forma differenziale

$$\omega(x, y) = \frac{2x + y - 1}{2x^2 + y^2 - 2x + 2xy + 1} dx + \frac{x + y}{2x^2 + y^2 - 2x + 2xy + 1} dy$$

lungo l'arco di circonferenza $\gamma(t) = (2 + \cos t, \sin t)$, $t \in [0, \pi]$ nel verso delle ascisse crescenti.

Esercizio 3. Determinare tutte le eventuali soluzioni del problema

$$\begin{cases} 2y' = \frac{y}{x} + \frac{x^2}{y} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

nel più ampio intervallo dove risultano essere soluzioni.