

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA – A.A.2021-22-23

Dipartimento di Matematica e Informatica – Corso di laurea triennale in Matematica

Prova di **Analisi Matematica II** assegnata il giorno 20 dicembre 2022.

Tempo a disposizione: **120 minuti**. Durante lo svolgimento **NON È PERMESSO** consultare libri, appunti o formulari. È altresì **vietato** l'uso di qualsiasi tipo di **DISPOSITIVO ELETTRONICO** pena l'**ANNULLAMENTO DELLA PROVA**.

N. B.: La prova in itinere per gli studenti del II anno comprende solo lo svolgimento dei due quesiti di teoria e degli esercizi 1 e 2 (a).

Domanda di teoria 1. Si enunci e si dimostri il teorema di Schwartz sull'inversione dell'ordine di derivazione.

Domanda di teoria 2. Si enunci e si dimostri il teorema di Fermat.

Esercizio 1. Stabilire il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n x^n \frac{\operatorname{sen}^2 n}{1+n^2}$$

in \mathbb{R} .

Esercizio 2. (a) Determinare gli eventuali estremi relativi della funzione

$$f(x, y, z) = x(x^2 + y^2 + z^2)e^{-x(x^2+y^2+z^2)}.$$

(b) Determinare gli eventuali estremi assoluti della precedente funzione nel semispazio

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 0\}.$$

Esercizio 3. Dire se l'equazione

$$x^2 + y^2 - \int_0^x e^{-t^2} \operatorname{sen}(xt) dt + \operatorname{sen}(yz) + x = 0$$

definisce implicitamente una funzione in un intorno dell'origine. Scrivere l'equazione del piano tangente nell'origine alla superficie grafico di tale funzione.

Esercizio 4. Determinare le eventuali soluzioni del problema

$$\begin{cases} y' + y = \sqrt{y} \\ y(0) = 1/2 \end{cases}$$

precisando il più ampio intervallo nel quale ciascuna di esse è definita.