



UNIVERSITÀ
degli STUDI
di CATANIA

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA – A.A.2024-25

Dipartimento di Matematica e Informatica – Corso di laurea triennale in Matematica

Prova di **Analisi Matematica I** (Parte B) assegnata il giorno 17 aprile 2025.

Tempo a disposizione: **90 minuti**. Durante lo svolgimento **NON È PERMESSO** consultare libri, appunti o formulari. È altresì **vietato** l'uso di qualsiasi tipo di **DISPOSITIVO ELETTRONICO** pena l'**ANNULLAMENTO DELLA PROVA**.

Esercizio 1. Sia f una funzione convessa in $\mathbb{R}$ ivi due volte derivabile. Dimostrare che e^f è convessa. Sia inoltre φ una funzione due volte derivabile in $\mathbb{R}$. Quali condizioni garantiscono la convessità di $\varphi \circ f$?

Esercizio 2. Data la funzione definita dalla legge

$$f(x) = \frac{e^{-x^2} - 1}{x} \quad \forall x \neq 0$$

dire - spiegandone il perché - se è possibile prolungare la funzione in modo che il prolungamento risulti avere derivata di ogni ordine in $\mathbb{R}$.

Esercizio 3. Calcolare l'integrale

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 2x}}$$

dopo avere stabilito se la funzione integranda sia sommabile.

Esercizio 4. Studiare la funzione

$$f(x) = \int_0^{x^2} \sqrt[3]{|1 - t|} dt$$

e tracciarne il grafico.

Esercizio 5. Dimostrare che il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + ky' - 4y = x - 1 \\ y(1) = 0, y'(1) = 1 \end{cases}$$

ammette una ed una sola soluzione al variare di $k \in \mathbb{R}$. Determinare i valori del parametro reale k in modo che la soluzione abbia massimo locale nel punto di ascissa 1. Risolvere infine il problema per $k = 0$.