



UNIVERSITÀ
degli STUDI
di CATANIA

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA – A.A.2024-25

Dipartimento di Matematica e Informatica – Corso di laurea triennale in Matematica

Prova di **Analisi Matematica I** (Parte B) assegnata il giorno 20 gennaio 2025.

Tempo a disposizione: **90 minuti**. Durante lo svolgimento **NON È PERMESSO** consultare libri, appunti o formulari. È altresì **vietato** l'uso di qualsiasi tipo di **DISPOSITIVO ELETTRONICO** pena l'**ANNULLAMENTO DELLA PROVA**.

Esercizio 1. Siano data una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua e tale che

$$4f^2(x) - 4f(x) + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dimostrare che se esiste un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $f(x_0) = 0$ allora f è limitata superiormente.

Esercizio 2. Stabilire se l'integrale

$$\int_{1/2\pi}^{+\infty} \frac{1}{x^2} \cos^2 \frac{1}{x} dx$$

esiste finito ed eventualmente calcolarlo.

Esercizio 3. Studiare la funzione

$$f(x) = \arctan x - \log(1 + x^2)^2$$

e determinarne il grafico.

Esercizio 4. Determinare l'eventuale limite della successione numerica definita dalla legge

$$\begin{cases} a_1 = \sqrt{3} \\ a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \end{cases}$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 5. Studiare il problema

$$\begin{cases} y' + y = y^3 \\ y(1) = 1/2 \end{cases}$$

precisando il più ampio intervallo nel quale sono definite le eventuali soluzioni.