



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA – A.A.2024-25

Dipartimento di Matematica e Informatica – Corso di laurea triennale in Matematica

Prova di **Analisi Matematica I** (Parte B) assegnata il giorno 20 gennaio 2025.

Tempo a disposizione: **90 minuti**. Durante lo svolgimento **NON È PERMESSO** consultare libri, appunti o formulari. È altresì **vietato** l'uso di qualsiasi tipo di **DISPOSITIVO ELETTRONICO** pena l'**ANNULLAMENTO DELLA PROVA**.

**Esercizio 1.** Siano data una funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continua e tale che

$$4f^2(x) - 4f(x) + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dimostrare che se esiste un punto  $x_0 \in \mathbb{R}$  tale che  $f(x_0) = 0$  allora  $f$  è limitata superiormente.

**Esercizio 2.** Stabilire se l'integrale

$$\int_{1/2\pi}^{+\infty} \frac{1}{x^2} \cos^2 \frac{1}{x} dx$$

esiste finito ed eventualmente calcolarlo.

**Esercizio 3.** Studiare la funzione

$$f(x) = \arctan x - \log(1 + x^2)^2$$

e determinarne il grafico.

**Esercizio 4.** Determinare l'eventuale limite della successione numerica definita dalla legge

$$\begin{cases} a_1 = \sqrt{3} \\ a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \end{cases}$$

per ogni  $n \in \mathbb{N}$ .

**Esercizio 5.** Studiare il problema

$$\begin{cases} y' + y = y^3 \\ y(1) = 1/2 \end{cases}$$

precisando il più ampio intervallo nel quale sono definite le eventuali soluzioni.