



UNIVERSITÀ
degli STUDI
di CATANIA

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA – A.A.2023-24

Dipartimento di Matematica e Informatica – Corso di laurea triennale in Matematica

Prova di **Analisi Matematica I** (Parte B) assegnata il giorno 17 settembre 2024.

Tempo a disposizione: **90 minuti**. Durante lo svolgimento **NON È PERMESSO** consultare libri, appunti o formulari. È altresì **vietato** l'uso di qualsiasi tipo di **DISPOSITIVO ELETTRONICO** pena l'**ANNULLAMENTO DELLA PROVA**.

Esercizio 1. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale continua in $\mathbb{R}$. Mostrare che, per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$, la successione di termine generale

$$y_n = \frac{n}{2} \int_{x_0-1/n}^{x_0+1/n} f(t) dt \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

è convergente e determinarne il suo limite.

Esercizio 2. Stabilire se l'integrale

$$\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}} dx$$

esiste finito ed eventualmente calcolarlo.

Esercizio 3. Studiare la funzione definita mediante la legge

$$\sqrt{e^{-x} |\sin x|}$$

e tracciarne un grafico qualitativo.

Esercizio 4. Provare che la funzione definita dalla legge

$$\sqrt{x^2 + 4} - \sqrt{x^2 + 1}$$

è Lipschitziana in $\mathbb{R}$.

Esercizio 5. Determinare tutte le eventuali soluzioni del problema

$$\begin{cases} 4y''' + y' - 5y = \frac{\cos x}{\sqrt{e^x}} \\ y(0) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0 \end{cases}$$