



UNIVERSITÀ  
degli STUDI  
di CATANIA

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA – A.A.2023-24

Dipartimento di Matematica e Informatica – Corso di laurea triennale in Matematica

Prova di **Analisi Matematica I** (Parte B) assegnata il giorno 2 settembre 2024.

Tempo a disposizione: **90 minuti**. Durante lo svolgimento **NON È PERMESSO** consultare libri, appunti o formulari. È altresì **vietato** l'uso di qualsiasi tipo di **DISPOSITIVO ELETTRONICO** pena l'**ANNULLAMENTO DELLA PROVA**.

**Esercizio 1.** Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $\exists \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

1: Dimostrare che  $-sef$  è derivabile - ammette almeno un punto di estremo relativo.

2: Il risultato è ancora valido nell'ipotesi in cui la funzione sia soltanto continua?

**Esercizio 2.** Stabilire se l'integrale

$$\int_0^1 \frac{1}{1 + \sqrt{x} + \sqrt{1+x}} dx$$

esiste finito ed eventualmente calcolarlo.

**Esercizio 3.** Studiare la funzione definita mediante la legge

$$f(x) = e^{\frac{x^2}{1+x^2}}$$

e tracciarne un grafico qualitativo.

**Esercizio 4.** Sia data la funzione  $f$  definita dalla legge

$$f(x) = \frac{\log(8-x)}{\log x}, \quad \forall x \in [2, 7].$$

Provare che  $f$  è invertibile, determinare il dominio dell'inversa e calcolarne la derivata nel punto  $y_0 = 1$ .

**Esercizio 5.** Determinare tutte le eventuali soluzioni del problema

$$\begin{cases} y' + 3x^2y = 3x^2 \sqrt[3]{y^2} \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

precisando - per ciascuna di esse - il più ampio intervallo nel quale risultino essere soluzione.