UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA – A.A.2023-24

Dipartimento di Matematica e Informatica – Corso di laurea triennale in Matematica

Prova di **Analisi Matematica I** (Parte B) assegnata il giorno 26 luglio 2024.

Tempo a disposizione: **90 minuti**. Durante lo svolgimento **NON È PERMESSO** consultare libri, appunti o formulari. È altresì **vietato** l'uso di qualsiasi tipo di **DISPOSITIVO ELETTRONICO** pena l'**ANNULLAMENTO DELLA PROVA**.

Esercizio 1. Sia data una funzione $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ tale che

$$\exists f'(0) > 0, \qquad \exists \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \,.$$

1: Dire - spiegandone il perché - se la funzione ammette massimo nel suo intervallo di definizione.

2: Il risultato - opportunamente riformulato - è ancora vero nel caso in cui la funzione sia definita in un intervallo **limitato**?

3: Il risultato - o la sua eventuale generalizzazione - è valido se $f'(0) = 0$?

Esercizio 2. Stabilire se l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{1+x}}{(x^2+1)\sqrt{x}}\, dx$$

esiste finito ed eventualmente calcolarlo.

Esercizio 3. Studiare la funzione definita mediante la legge

$$f(x) = \int_1^x \frac{\sqrt{t+1}}{\log(t+1)}\, dt$$

e tracciarne un grafico qualitativo.

Esercizio 4. Calcolare il limite (se esiste) della successione

$$\begin{cases} a_1 = \lambda \\ a_{n+1} = 2a_n + e^{-a_n} \end{cases}$$

al variare del parametro reale λ.

Esercizio 5. Determinare tutte le eventuali soluzioni del problema

$$\begin{cases} y' - \dfrac{y}{x} = 2\sqrt{xy} \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

precisando - per ciascuna di esse - il più ampio intervallo nel quale risultino essere soluzione.