UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA – A.A.2022-23

Dipartimento di Matematica e Informatica – Corso di laurea triennale in Matematica

Prova di **Analisi Matematica I** assegnata il giorno 1 marzo 2023.

Tempo a disposizione: **120 minuti**. Durante lo svolgimento **NON È PERMESSO** consultare libri, appunti o formulari. È altresì **vietato** l'uso di qualsiasi tipo di **DISPOSITIVO ELETTRONICO** pena l'**ANNULLAMENTO DELLA PROVA**.

PROVA TEORICA

Questa parte di compito deve essere svolta soltanto da coloro che non hanno superato le prove in itinere.

Domanda di teoria 1. Si enunci e si dimostri il teorema di Weierstrass

Domanda di teoria 2. Si enunci e si dimostri il teorema di Cantor.

PROVA PRATICA

Esercizio 1. Studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \operatorname{sen}\left(\frac{n!}{n^n}\right)^{\alpha} \log\left(1+\frac{1}{n}\right), \qquad \alpha > 0$$

Esercizio 2. Studiare la funzione

$$f(x) = \int_0^{x+|x|} \frac{e^{-t^2}}{\sqrt{1+t}}\, dt$$

e tracciarne il grafico.

Esercizio 3. Dire se l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\sqrt{\operatorname{arctang} x}\,(x^4+1)}\, dx$$

esiste finito.

Esercizio 4. Calcolare il limite della successione definita per ricorrenza ponendo

$$\begin{cases} a_1 = \lambda \\ a_{n+1} = a_n \operatorname{arctang} a_n^2 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

al variare del parametro reale λ.