UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA – A.A.2020-21

Dipartimento di Matematica e Informatica – Corso di laurea triennale in Matematica

Prova di **Analisi Matematica I** assegnata il 28 Settembre 2021.

AVVERTENZE IMPORTANTI

- Chi intende sostenere l'esame relativo alla prima parte del programma **deve** svolgere correttamente gli esercizi da **1** a **4** ovvero quelli del gruppo contrassegnato con **PRIMA PARTE**
- Chi intende sostenere l'esame relativo alla prima parte del programma **deve** svolgere correttamente gli esercizi da **5** a **8** ovvero quelli del gruppo contrassegnato con **SECONDA PARTE**
- Chi intende sostenere l'esame relativo alla prova completa **deve** svolgere correttamente **2** esercizi della **PRIMA PARTE** e **3** della **SECONDA PARTE** o viceversa.

Tempo a disposizione: **120 minuti**. Durante lo svolgimento **NON È PERMESSO** consultare libri, appunti o formulari. È altresì **vietato** l'uso di qualsiasi tipo di **DISPOSITIVO ELETTRONICO** pena l'**ANNULLAMENTO DELLA PROVA**.

PRIMA PARTE

Esercizio 1. Studiare al variare del parametro reale x il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctang}\left(\frac{1}{n\log(1+\frac{1}{n^x})}\right)}{e^{\frac{1}{n}}-1}$$

.

Esercizio 2. Determinare tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ in cui la legge

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x \operatorname{sen}^2 x}}$$

verifica le ipotesi del Teorema di Weierstrass.

Esercizio 3. Data la funzione definita dalla legge

$$f(x) = \frac{e^{\sqrt{x-1}} - \cos(x-1)}{\log x}$$

studiare ed eventualmente calcolare i seguenti limiti

$$\lim_{x\to 0} f(x) \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x).$$

Esercizio 4. Sia $f : [0, 2[\to \mathbb{R}^+$ una funzione uniformemente continua. Dire per quali valori del parametro reale α la funzione definita dalla legge

$$\sqrt{\frac{f(x)}{(2-x)^\alpha}}$$

ammette asintoti.

SECONDA PARTE

Esercizio 5. Studiare la disequazione seguente

$$\int_0^x e^{-t^2} \log(1+t)\, dt > x$$

Esercizio 6. Calcolare

$$\int_0^1 \frac{1 - \sqrt[3]{\log(1+x^2)}}{\sqrt{\log(1+x^2)} - \sqrt[3]{\log(1+x^2)}} \frac{x}{1+x^2}\, dx$$

Esercizio 7. Sia dato il problema

$$\begin{cases} y' = \operatorname{arctang}(xy) \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

1: Dire se l'origine è punto di estremo relativo per le eventuali soluzioni.
2: Dire se esiste un intorno dell'origine nel quale le eventuali soluzioni sono funzioni convesse.

Esercizio 8. Sia data una funzione $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ ivi sommabile e regolare all'infinito.

1: Provare che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.
2: Provare che la funzione $\dfrac{f(x)}{x^\alpha}$ è sommabile in $[1, +\infty[$ per ogni $\alpha \geq 0$.
3: Provare o confutare la seguente affermazione: la funzione $\dfrac{f(x)}{x^\alpha}$ è sommabile in $[1, +\infty[$ per ogni $\alpha < 0$.