UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA – A.A.2020-21

Dipartimento di Matematica e Informatica – Corso di laurea triennale in Matematica

Prova di **Analisi Matematica I** assegnata il 29 Giugno 2021.

AVVERTENZE IMPORTANTI

- Chi intende sostenere l'esame relativo alla prima parte del programma **deve** svolgere correttamente gli esercizi da **1** a **4** ovvero quelli del gruppo contrassegnato con **PRIMA PARTE**
- Chi intende sostenere l'esame relativo alla prima parte del programma **deve** svolgere correttamente gli esercizi da **5** a **8** ovvero quelli del gruppo contrassegnato con **SECONDA PARTE**
- Chi intende sostenere l'esame relativo alla prova completa **deve** svolgere correttamente **2** esercizi della **PRIMA PARTE** e **3** della **SECONDA PARTE** o viceversa.

Tempo a disposizione: **120 minuti**. Durante lo svolgimento **NON È PERMESSO** consultare libri, appunti o formulari. È altresì **vietato** l'uso di qualsiasi tipo di **DISPOSITIVO ELETTRONICO** pena l'**ANNULLAMENTO DELLA PROVA**.

PRIMA PARTE

Esercizio 1. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si consideri l'equazione

$$e^{\sqrt{x}} = n \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

e si provi che essa ammette una ed una sola soluzione x_n. Dire - spiegandone il perché - se la successione $\{x_n\}$ è limitata.

Esercizio 2. Sia $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ una funzione tale che

$$f(x + y) \leq f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in [0, +\infty[$$

e

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Provare che per ogni serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ a termini non negativi e divergente la serie $\sum_n f(x_n)$ diverge.

Esercizio 3. Studiare, al variare del parametro reale x, il carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\operatorname{arctang}\left(\frac{1}{n^2-1}\right)^x}{n^{3x-1}}$$

Esercizio 4. Assegnata la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{x-1}{x}} & \text{se } x > 1 \\ \\ kx^2 \operatorname{arctang}(x^2-1) & \text{se } x \leq 1 \end{cases}$$

a) dire per quali valori del parametro reale k essa è uniformemente continua in $[2, +\infty[$, in $[0, +\infty[$ e in $]-\infty, 0]$ rispettivamente.

b) dire, giustificando la risposta, se nel caso $k \geq 0$ la funzione f è iniettiva.

SECONDA PARTE

Esercizio 5. Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione convessa e derivabile tale che

$$\lim_{x \to a} f'(x) = -1 \qquad \lim_{x \to b} f'(x) = 1$$

a) Provare che esistono $k \in \mathbb{R}$ tali che l'equazione $f(x) = k$ non ha soluzioni

b) dire, giustificando la risposta, se f è iniettiva.

Esercizio 6. Determinare la primitiva F della funzione $f(x) = \sqrt{x} \operatorname{sen} \sqrt{x}$ tale che $F(\pi) = 0$.

Esercizio 7. Studiare la successione definita dalla legge

$$\begin{cases} a_1 = 3/4 \\ a_{n+1} = \sqrt{|a_n| - a_n^2} \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

e calcolare il limite nel caso in cui esso esista.

Esercizio 8. Studiare la funzione definita mediante la legge

$$f(x) = \int_0^{|x|} e^{-t^2} \log(1+t)\, dt$$

e tracciarne un grafico qualitativo.