UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA – A.A. 2020-21

Dipartimento di Matematica e Informatica – Corso di laurea triennale in Matematica

Prova **in itinere** di **Analisi Matematica I** assegnata il 15 Giugno 2021.

AVVERTENZE

Tempo a disposizione: **120 minuti**. Durante lo svolgimento **NON È PERMESSO** consultare libri, appunti o formulari. È altresì **vietato** l'uso di qualsiasi tipo di **DISPOSITIVO ELETTRONICO** pena l'**ANNULLAMENTO DELLA PROVA**.

Esercizio 1. Studiare, al variare del parametro reale x, il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{x-5}}{n^{2x}}$$

Esercizio 2. Studiare continuità, monotonia ed invertibilità delle funzioni f e g definite ponendo

$$f(x) = \operatorname{arctang}\left(\sqrt{e^{2x+|x-1|}-1}\right)$$

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in X \\ \sqrt[3]{x^2-1} & \text{se } x \in \mathbb{R} - X \end{cases}$$

dove X denota il campo di esistenza della funzione f.

Scrivere - eventualmente - le leggi delle funzioni inverse.

Esercizio 3. Studiare e calcolare il seguente limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\operatorname{arcsen}(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1})}{\log\left(\frac{n+1}{n-5}\right)}$$

Esercizio 4. Sia f una funzione Lipschitziana di costante $L < 1$ e sia $f(0) = 0$. Provare che se la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ converge allora converge anche la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (f(x_n))^n$. Provare che $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$ verifica le suddette ipotesi e provare che il viceversa può essere falso.