UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA – A.A.2020-21

Dipartimento di Matematica e Informatica – Corso di laurea triennale in Matematica

Prova **completa** di **Analisi Matematica I** assegnata il 19 Febbraio 2021.

AVVERTENZE

Tempo a disposizione: **150 minuti**. Durante lo svolgimento **NON È PERMESSO** consultare libri, appunti o formulari. È altresì **vietato** l'uso di qualsiasi tipo di **DISPOSITIVO ELETTRONICO** pena l'**ANNULLAMENTO DELLA PROVA**.

Esercizio 1. Studiare al variare del parametro reale k il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{4+4\frac{\log n}{n^5}}-2}{n^k(\cos\frac{1}{n^2}-1)}$$

Esercizio 2. Provare che l'equazione $e^{-\frac{1}{n}x}+1=x^3+nx$ ammette una ed una sola soluzione positiva x_n per ogni $n \in \mathbb{N}$. Provare inoltre che la successione $\{x_n\}$ così ottenuta è limitata e studiare il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(x_n^3+nx_n)$

Esercizio 3. Data la funzione

$$f(x)=\begin{cases} x\operatorname{sen} x & \text{se } x\geq 0 \\ -x^2 & \text{se } x<0 \end{cases}$$

stabilirne l'ordine massimo di derivazione.

Determinare una funzione $h:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ in modo che la funzione

$$g(x)=\begin{cases} h(x) & \text{se } x\geq 0 \\ -x^3 & \text{se } x<0. \end{cases}$$

sia derivabile in $\mathbb{R}$ sino all'ordine 3.

Esercizio 4. Determinare il polinomio di Mc Laurin della funzione $f(x)=xe^{-x^2}$ di grado 5.

Esercizio 5. Studiare la funzione definita dalla legge

$$f(x)=\int_4^x \frac{t^3}{\sqrt{t^2-4}}\,dt$$

e tracciarne un grafico qualitativo.