UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA – A.A.2020-21

Dipartimento di Matematica e Informatica – Corso di laurea triennale in Matematica

Prova in **itinere** di **Analisi Matematica I** assegnata il 19 Febbraio 2021.

AVVERTENZE

Tempo a disposizione: **150 minuti**. Durante lo svolgimento **NON È PERMESSO** consultare libri, appunti o formulari. È altresì **vietato** l'uso di qualsiasi tipo di **DISPOSITIVO ELETTRONICO** pena l'**ANNULLAMENTO DELLA PROVA**.

Esercizio 1. Provare usando la definizione di limite che

$$\lim_{x\to+\infty} \log\left(1-\frac{1}{2x-5}\right)=0.$$

Esercizio 2. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to+\infty} \big(x - x^3\log(1+1/x)\big)$$

Esercizio 3. Detto X il campo di esistenza della funzione $f(x)=\operatorname{arcsen}(\sqrt{x}-1)$, studiare l'uniforme continuità in $]-\infty,4]$ e in $[0,+\infty[$ della funzione g definita tramite la legge

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & \text{se } x\in X \\ \dfrac{\pi}{2}\operatorname{sen}\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right) & \text{se } x\in \mathbb{R}^-\setminus X \\ \\ \left(\dfrac{\pi}{2}\right)^{x-3} & \text{se } x\in \mathbb{R}_0^+\setminus X \end{cases}$$

Esercizio 4. Provare che l'equazione

$$e^{-\frac{1}{n}x}+1=x^3+nx$$

ammette una ed una sola soluzione positiva x_n per ogni $n\in\mathbb{N}$. Provare inoltre che la successione $\{x_n\}$ così ottenuta è limitata e studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(x_n^3+nx_n)$$

Esercizio 5. Studiare al variare del parametro reale k il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{4+4\frac{\log n}{n^5}}-2}{n^k(\cos\frac{1}{n^2}-1)}$$