UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA – A.A.2019-20

Dipartimento di Matematica e Informatica – Corso di laurea triennale in Matematica

Prova **secondo modulo** di **Analisi Matematica I** assegnata il 9 Ottobre 2020.

AVVERTENZE

Tempo a disposizione: **150 minuti**. Durante lo svolgimento **NON È PERMESSO** consultare libri, appunti o formulari. È altresì **vietato** l'uso di qualsiasi tipo di **DISPOSITIVO ELETTRONICO** pena l'**ANNULLAMENTO DELLA PROVA**.

Esercizio 1. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} e^{-1/x}$$

e tracciarne un grafico qualitativo.

Esercizio 2. Calcolare

$$\int_{1/2}^{1} \frac{dx}{(\operatorname{arcsen} x)\sqrt{1-x^2}}$$

Esercizio 3. Posto

$$f_n(x) = \operatorname{sen}^2(nx)e^{-nx} \quad x \geq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

studiare la convergenza puntuale ed uniforme della successione $\{f_n\}$ in $[0, +\infty[$ ed in tutti i suoi sottointervalli.

Esercizio 4. Sia $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ una funzione Riemann integrabile in ogni intervallo chiuso e limitato e sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ la funzione definita dalla legge

$$f(x) = e^{-\int_0^x h(t)dt}.$$

Dimostrare che la successione $\{f(n)\}$ converge. Provare che ciò in generale non è vero se la funzione h è di segno variabile.

Esercizio 5. Siano $|a| \geq 1$, $\delta > 0$ e $y :]1-\delta, 1+\delta[\to \mathbb{R}$ soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = ay^2(1-x) \\ y(1) = -2a \end{cases}$$

Provare - **senza risolvere l'equazione** - che

1. La soluzione y ha segno costante e $|y(x)| \geq 2|a| \quad \forall x \in]1-\delta, 1+\delta[$
2. la soluzione è concava se $a \geq 1$ e convessa se $a \leq -1$