UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA – A.A.2019-20

Dipartimento di Matematica e Informatica – Corso di laurea triennale in Matematica

Prova **completa** di **Analisi Matematica I** assegnata il giorno 25 Settembre 2020.

AVVERTENZE

Tempo a disposizione: **150 minuti**. Durante lo svolgimento **NON È PERMESSO** consultare libri, appunti o formulari. È altresì **vietato** l'uso di qualsiasi tipo di **DISPOSITIVO ELETTRONICO** pena l'**ANNULLAMENTO DELLA PROVA**.

Esercizio 1. Sia data una funzione $g : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ continua e tale che $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$. Sia inoltre $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ tale che

$$|f(x)| \leq xg(x) \qquad \forall x \geq 0.$$

Dimostrare che f è derivabile nell'origine.

Esercizio 2. Studiare la derivabilità della funzione definita mediante la legge

$$f(x) = \sqrt{\operatorname{arcsen}\left(\frac{2x-1}{x}\right)}$$

e determinarne estremi assoluti ed eventuali estremi relativi.

Esercizio 3. Studiare, al variare di x nell'insieme di definizione, il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx\log x}}{x^2+n}$$

Esercizio 4. Assegnata la successione di funzioni $\{f_n\}_n$ dove, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{3\sqrt{nx}}{2+n} & 0 \leq x \leq \frac{1}{n^2} \\[2ex] \dfrac{2+n^2x}{\sqrt{n}(2+n)} & \dfrac{1}{n^2} < x \leq \dfrac{1}{n} \\[2ex] \dfrac{3+n(1-x)}{\sqrt{n}(2+n)} & \dfrac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases}$$

studiare il carattere della successione $\{F_n\}_n$ con

$$F_n(x) = \int_0^x f_n(t)dt \quad \forall x \in [0,1].$$

Esercizio 5. Studiare la funzione

$$f(x) = \int_1^{\sqrt{x}} \frac{2\log t}{t+1} dt$$