UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA – A.A.2019-20

Dipartimento di Matematica e Informatica – Corso di laurea triennale in Matematica

Prova **completa** di **Analisi Matematica I** assegnata il giorno 21 Luglio 2020.

AVVERTENZE

Tempo a disposizione: **150 minuti**. Durante lo svolgimento **NON È PERMESSO** consultare libri, appunti o formulari. È altresì **vietato** l'uso di qualsiasi tipo di **DISPOSITIVO ELETTRONICO** pena l'**ANNULLAMENTO DELLA PROVA**.

Esercizio 1. Verificare che la funzione

$$d(x,y) = \left| \frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|} \right|$$

definisce una metrica in $\mathbb{R}$. Dimostrare che lo spazio metrico così ottenuto non è completo.

Esercizio 2. Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n^2+1}{n^2+2} \right)^n x^n$$

al variare del parametro reale x.

Esercizio 3. Studiare la disequazione

$$2(\sqrt{x}-1) - \log \frac{x+\sqrt{x}}{2} \geq 0 \quad x > 0$$

Esercizio 4. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $f_n \in C^1([0,1])$ soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = e^{-|y|} \dfrac{nx}{n^2+x^2} \\ y(0) = \dfrac{1}{n} \end{cases}$$

Provare che ogni funzione f_n è positiva e studiare la convergenza della successione $\{f_n\}$.

Esercizio 5. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia f_n la funzione definita dalla legge

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{2nx}{n^2x^2+n} & \text{se } 0 \leq x \leq \dfrac{1}{n^2} \\ \dfrac{2}{(n^4+n)x} & \text{se } x > \dfrac{1}{n^2}. \end{cases}$$

Studiare la convergenza della successione $\{f_n\}$ e calcolare

$$\lim_{n \to +\infty} (-1)^n \int_0^1 f_n(x)dx.$$