UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA – A.A.2019-20

Dipartimento di Matematica e Informatica – Corso di laurea triennale in Matematica

Seconda prova in itinere di **Analisi Matematica I** assegnata il giorno 21 Luglio 2020.

AVVERTENZE

Tempo a disposizione: **150 minuti**. Durante lo svolgimento **NON È PERMESSO** consultare libri, appunti o formulari. È altresì **vietato** l'uso di qualsiasi tipo di **DISPOSITIVO ELETTRONICO** pena l'**ANNULLAMENTO DELLA PROVA**.

Esercizio 1. Siano X l'insieme dei termini della successione

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = a_n - 1 + \dfrac{1}{a_n} \end{cases}$$

e Y l'insieme dei termini della successione $b_n = 1 - \dfrac{1}{2^n}$.

Dire se X e Y sono separati e contigui.

Esercizio 2. Studiare la funzione

$$f(x) = \int_1^x \frac{e^{-t}}{1+\sqrt{t}}\, dt.$$

Esercizio 3. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia f_n la funzione definita dalla legge

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{2nx}{n^2x^2+n} & 0 \le x \le \dfrac{1}{n^2} \\ \dfrac{2}{(n^4+n)x} & x > \dfrac{1}{n^2} \end{cases}$$

studiare la convergenza della successione $\{f_n\}$ e calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} (-1)^n \int_0^1 f_n(x)dx.$$

Esercizio 4. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $f_n \in C^1([0,1])$ soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = e^{-|y|}\dfrac{nx}{n^2+x^2} \\ y(0) = \dfrac{1}{n} \end{cases}$$

Provare che ogni funzione f_n è positiva e studiare la convergenza della successione $\{f_n\}$.

Esercizio 5. Sia $f \in C^1(\mathbb{R})$ e siano $f(2) = 3$ e $f'(2) = a \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$. Provare che f è invertibile in un intorno del punto 2 e calcolare $Df^{-1}(3)$. Provare con un esempio che la tesi può essere falsa se $a = 0$.