UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA – A.A.2019-20

Dipartimento di Matematica e Informatica – Corso di laurea triennale in Matematica

Prova in itinere di **Analisi Matematica I** assegnata il giorno 19 Febbraio 2020.

AVVERTENZE

Tempo a disposizione: **120 minuti**. Durante lo svolgimento **NON È PERMESSO** consultare libri, appunti o formulari. È altresì **vietato** l'uso di qualsiasi tipo di **DISPOSITIVO ELETTRONICO** pena l'**ANNULLAMENTO DELLA PROVA**.

Esercizio 1. Per ogni $h \in \mathbb{R}$ sia assegnata la funzione $f_h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mediante la legge

$$f_h(x) = \begin{cases} h + \operatorname{arctang} \sqrt[3]{2x-1} & \text{se } x \in]-\infty, 1] \\ x - x \ln x & \text{se } x \in]1, +\infty[. \end{cases}$$

a) Dire per quali valori del parametro reale h la funzione f è continua.
b) Studiare l'uniforme continuità di f in $]-\infty, +\infty[$, in $]-\infty, 0]$ e in $]0, +\infty[$ al variare del parametro h.
c) Dire se f è invertibile negli intervalli $[e, +\infty[$ e $]-\infty, e[$ e - in caso affermativo - determinare il dominio della funzione inversa.

Esercizio 2. Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(2^{\frac{1}{n-1}} - 1)(1 - \cos \frac{1}{n})}{n^k \log^2(1 + \frac{1}{n^2})}$$

al variare del parametro reale k.

Esercizio 3. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione monotona in $[-r, r]$ per qualche $r > 0$. Provare che se la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \tag{1}$$

è assolutamente convergente allora lo è anche la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f(a_n) a_n. \tag{2}$$

Dire se è possibile stabilire il carattere della serie (2) nel caso in cui la serie (1) sia semplicemente convergente.

Esercizio 4. Sia data l'applicazione $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita mediante la legge

$$d(x, y) = |e^{-x} - e^{-y}| \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}\,.$$

Dire giustificando le risposte se d è una metrica e, in caso affermativo, se $(\mathbb{R}, d)$ è uno spazio metrico completo secondo Cauchy.

Esercizio 5. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ una funzione continua tale che $f(0) = 2$ e $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x^2} = L > 0$. Dimostrare che l'equazione $\log f(x) = x^2$ ammette soluzioni in $\mathbb{R}$.