Algoritmi (9 CFU)

(A.A. 2009-10)

Equazioni di ricorrenza

Overview

- Definiamo cos’è una ricorrenza
- Introduciamo 3 metodi per risolvere equazioni di ricorrenza
  - Sostituzione e Telescoping
  - Albero di ricorsione
  - Teorema Master
- Esempi ed Esercizi

Definizione

- Una ***ricorrenza*** è una equazione o disequazione che descrive una funzione in termini dei suoi valori su input più piccoli.
- MERGE-SORT

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{se } n=1 \\ 2T(n/2) + \Theta(n) & \text{se } n>1 \end{cases}$$

Tecnicismi

- Assumiamo che le variabili assumano solo valori interi
- MERGE-SORT

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{if } n=1 \\ T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n) & \text{if } n>1 \end{cases}$$

- Per semplicità, ignoriamo floor e ceiling – insignificanti per i nostri discorsi

Tecnicismi

- Condizioni al contorno (piccoli valori di *n*) sono pure ignorati, così come costanti moltiplicative o additive

$$T(n) = 2T(n/2) + \Theta(n)$$

- Assumiamo che i valori di $T(n)$ siano piccole costanti per piccoli valori di *n*

Metodo di Sostituzione

- Due passi:
  - Indovina la soluzione.
  - Usa l'induzione matematica per trovare le costanti e dimostrare che quella è la soluzione.
- Problema: si applica solo se si è in grado di indovinare la soluzione.

Metodo di Sostituzione

- Esempio:

$$T(n) = 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + n$$

- Indovino:

$$T(n) = O(n \lg n)$$

- Dimostro per induzione:

$$T(n) \leq cn \lg n$$

  per qualche costante $c>0$.

Dimostrazione induttiva

- Non ci preoccupiamo del caso base e assumiamo che vale:
$$T(1) = \Theta(1)$$

- Ipotesi induttiva:
Per valori di $n < k$ la diseguaglianza vale, *i.e.*, $T(n) \le cn \lg n$
Dimostriamo che vale anche per $n = k$.

Dimostrazione induttiva

- In particolare, per $n = \lfloor k/2 \rfloor$, vale che

$$T(\lfloor k/2 \rfloor) \leq c \lfloor k/2 \rfloor \lg \lfloor k/2 \rfloor$$

La ricorrenza ci dice:

$$T(k) = 2T(\lfloor k/2 \rfloor) + k$$

Sostituendo otteniamo:

$$T(k) \leq 2[c \lfloor k/2 \rfloor \lg \lfloor k/2 \rfloor] + k$$

Dimostrazione induttiva

Le funzioni sono non-decrescenti quindi togliamo il floor e otteniamo:

$$T(k) \le 2[c\,(k/2)\,\lg\,(k/2)] + k$$

Che si semplifica:

$$T(k) \le ck\,(\lg k - \lg 2) + k$$

e, dal momento che lg 2 = 1, abbiamo:

$$T(k) \le ck \lg k - ck + k = ck \lg k + (1 - c)k$$

Quindi se $c \ge 1$, $T(k) \le ck \lg k$. *c.v.d.*

Sostituzione di variabili

- Esempio:

$$T(n) = 2T(\lfloor\sqrt{n}\rfloor) + \log n$$

- Ignoriamo arrotondamenti,poniamo $m = \lg n$ e otteniamo:

$$T(2^m) = 2T(2^{m/2})+m$$

- Poniamo $S(m)=T(2^m)$ e otteniamo:

$$S(m) \leq 2S(m/2)+m$$

Soluzione S(m)=O(m log m) e quindi

$$T(n)=T(2m)=O(m \log m) = O(\log n \log \log n)$$

Telescoping

- Equazioni di ricorrenza del tipo:

$$T(n) = T(n\text{-}1) + f(n)$$

- Si risolvono:

$$T(n) = \sum_{i=1}^{n} f(i)$$

- Esempio: $T(n) = T(n\text{-}1) + n$

$$T(n) = \sum_{i=1}^{n} f(i) = \sum_{i=1}^{n} i = n(n+1)/2$$

Mettiamo assieme il tutto

- Equazioni di ricorrenza del tipo:

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$

- Si risolvono:
  - $n=b^m$ ovvero $m = \log_b n$
  - $S(m)=T(b^m)$ -> $S(m)=aS(m-1)+f(b^m)$
  - $R(m)=S(m)/a^m$ -> $R(m)=R(m-1)+f(b^m)/a^m$
  - $R(m)= \sum_{i=0}^{m} f(b^i)/a^i$
  - $T(n)=a^m\sum_{i=0}^{m} f(b^i)/a^i$

Esempio:

- Equazioni di ricorrenza del tipo:

$$T(n) = 3T(n/2) + n$$

- $n=2^m$ ovvero $m = log_2 n$
- $R(m)= \sum_{i=0}^{m} 2^i/3^i \leq 3$
- $S(m) \leq 3\ 3^m$
- $T(n) \leq 3\ 3^{log_2 n} = O(n^{log_2 3})$

Lemma 1

- Equazioni di ricorrenza del tipo

$$T(n) = aT(n/a + k) + n,\ k \text{ costante},\ a > 1$$

Allora, $T(n)=\Theta(n \log n)$.

DIM per induzione:

A. $T(n) \geq T'(n)=aT'(n/a)+n=\Theta(n \log n)$

B. $T(n) \leq c\ (n \log_a n + n)$

- $T(n)\leq ac[((n+ak)/a)\log((n+ak)/a)+(n+ak)/a]+n=$
- $c(n+ak)\log((n+ak)/a)+c(n+ak)+n=$
  $c(n+ak)\log(n+ak)+n=$
- $cn \log(n+ak)+cak \log(n+ak)+n \leq(?)cn \log n +cn$

Lemma 1 (continua)

- $cn(\log(n+ak)-\log n) \leq (c-1)n - cak \log(n+ak)$
- $\leq a\, c\, g(n-1) + f(n)$
- $cn(\log(n+ak)-\log n) \leq (c-1)n - cak \log(n+ak)$
- $cn \log[(n+ak)/n] \leq (c-1)n - cak \log(n+ak)$

Osserviamo che

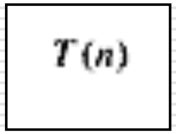
- $cn \log[(n+ak)/n] = cn \log[1+ ak/n] \rightarrow cak$
- $(c-1)n - cak \log(n+ak) \rightarrow +\infty$, per $c > 1$
- Quindi per n sufficientemente grandi la disequazione vale. Cvd.

Metodo dell'albero di ricorsione

- Tecnica semplice per calcolare un upper bound
- Da dimostrare poi per unduzione
- ***Albero di ricorsione***: rappresentazione visiva delle chiamate ricorsive dove ad ogni nodo associamo il costo del lavoro esterno.

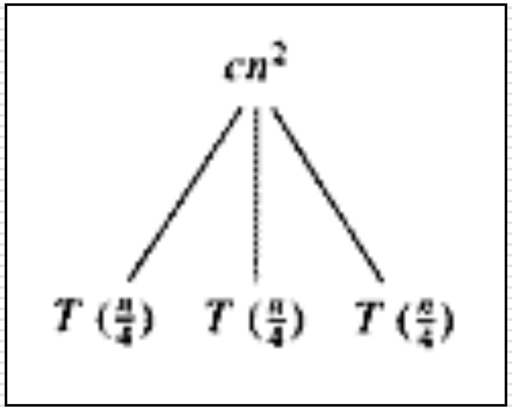
Metodo dell'albero di ricorsione

$$T(n) = 3T(\lfloor n/4 \rfloor) + \Theta(n^2)$$



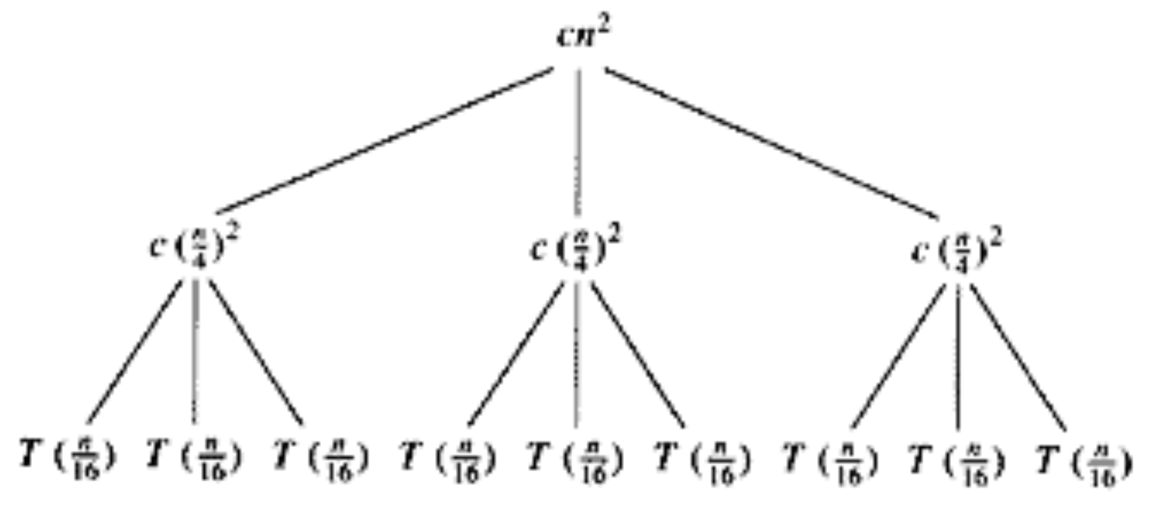
Metodo dell'albero di ricorsione

$$T(n) = 3T(\lfloor n/4 \rfloor) + \Theta(n^2)$$



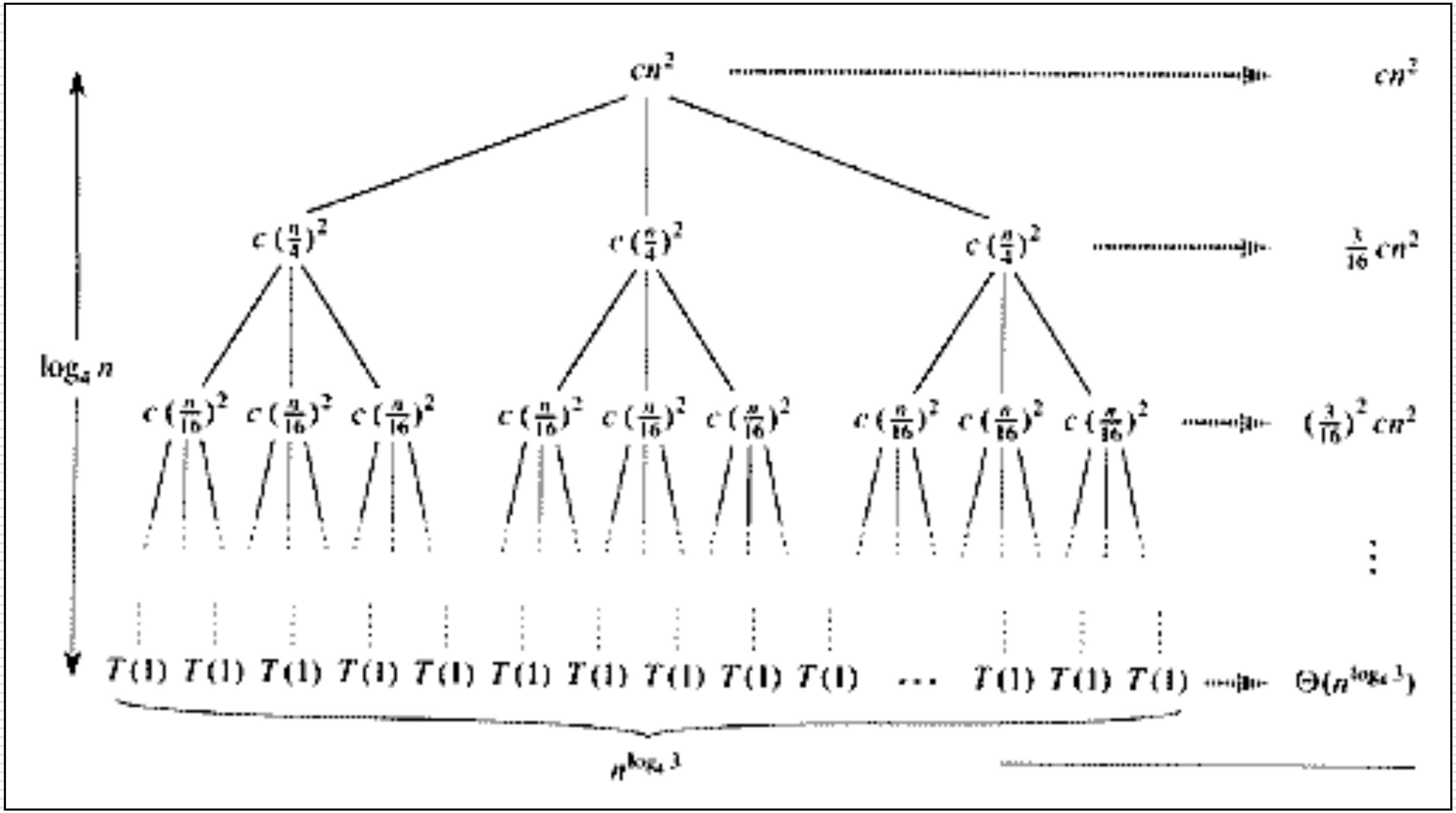
Metodo dell'albero di ricorsione

$$T(n) = 3T(\lfloor n/4 \rfloor) + \Theta(n^2)$$



(c)

Metodo dell'albero di ricorsione



Metodo dell'albero di ricorsione

- Mettendo assieme tutti i costi:

$$T(n) = \sum_{i=0}^{\log_4 n - 1} (3/16)^i cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3})$$

$$T(n) \leq \sum_{i=0}^{\infty} (3/16)^i cn^2 + o(n)$$

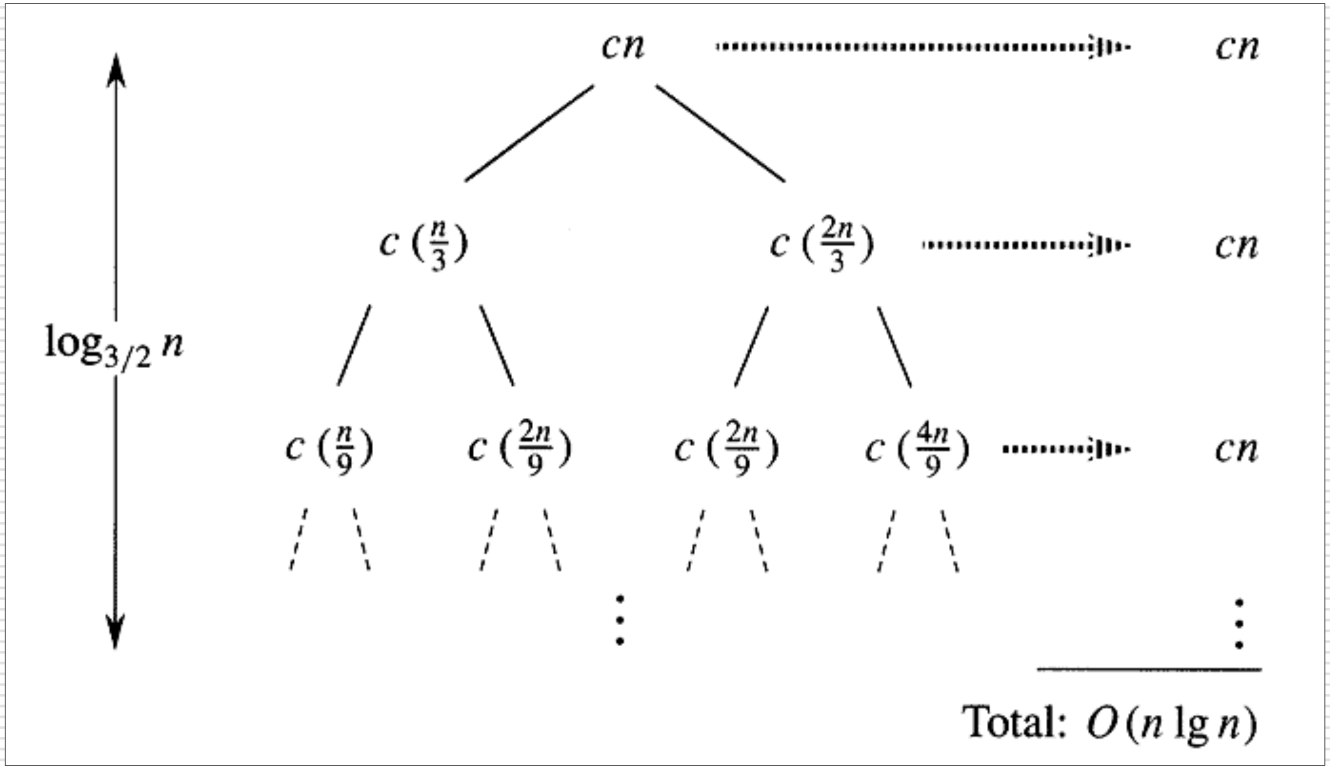
$$T(n) \leq (1/(1-3/16))cn^2 + o(n)$$

$$T(n) \leq (16/13)cn^2 + o(n)$$

$$T(n) = O(n^2)$$

Metodo dell'albero di ricorsione

$$T(n) = T(n/3) + T(2n/3) + O(n)$$



Metodo dell'albero di ricorsione

- Stima del costo totale:

$$T(n) = \sum_{i=0}^{\log_{3/2} n - 1} cn$$

- Dimostriamo quindi che

$$T(n) = O(n \lg n)$$

Metodo di Sostituzione

- Ricorrenza:

$$T(n) = T(n/3) + T(2n/3) + cn$$

- Indovino:

$$T(n) = O(n \lg n)$$

- Dimostro per induzione:

$$T(n) \leq dn \lg n$$

per qualche $d>0$

Dimostrazione induttiva

- Non ci preoccupiamo del caso base
- Ipotesi induttiva:
  Per valori di $n < k$ la diseguaglianza vale, *i.e.*, $T(n) \le dn \lg n$
  Dimostriamolo allor per $n = k$ as well.
- In particolare, l'ipotesi induttiva vale per i valori $n = k/3$, e $n = 2k/3$, …

Dimostrazione induttiva

- Quindi

$$T(k/3) \le d\ k/3 \lg k/3$$
$$T(2k/3) \le d\ 2k/3 \lg 2k/3$$

Ricordando la ricorrenza :

$$T(k) = T(k/3) + T(2k/3) + ck$$

E sostituendo abbiamo:

$T(k) \le [d\ (k/3) \lg (k/3)] + [d\ (2k/3) \lg (2k/3)] + ck$

Dimostrazione induttiva

- Quindi

  $T(k) \le [d\ (k/3)\ \lg k - d\ (k/3)\ \lg 3] +$
  $\qquad [d\ (2k/3)\ \lg k - d\ (2k/3)\ \lg(3/2)] + ck$

  Da cui otteniamo:

  $T(k) \le dk \lg k - d[(k/3) \lg 3 + (2k/3) \lg(3/2)] + ck$

  $T(k) \le dk \lg k - dk[\lg 3 - 2/3] + ck$

Ponendo $d \ge c/(\lg 3 - (2/3))$, abbiamo

$$T(k) \le dk \lg k$$

Metodo del Teorema Master

- Risolve tutta una classe di ricorrenze
- Ricorrenze che devono essere della forma:

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$

con $a \geq 1$ e $b > 1$ costanti e $f(n)$ funzione (asintoticamente) positiva.

Metodo del Teorema Master

- ***Teorema:***

  Data l'equazione di ricorrenza:

  $$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$

  1. Se $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$ per qualche $\varepsilon > 0$,

     allora $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$

  2. Se $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, allora

     $$T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg n)$$

Metodo del Teorema Master

3. Se $f(n) = \Omega(n^{\log_b a+\varepsilon})$ per qualche $\varepsilon>0$,

e se

$$af(n/b) \leq cf(n)$$

per qualche costante $c<1$

e *n sufficientemente grande*,

allora $T(n) = \Theta(f(n))$

T.M. Caso 2 generalizzato

Se $f(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log_b n^k)$, per k ≥ 0, allora

$$T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg n^{k+1})$$

Esempio

- Consideriamo la ricorrenza:

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{if } n = 1, \\ 3T(n/2) + n^2 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

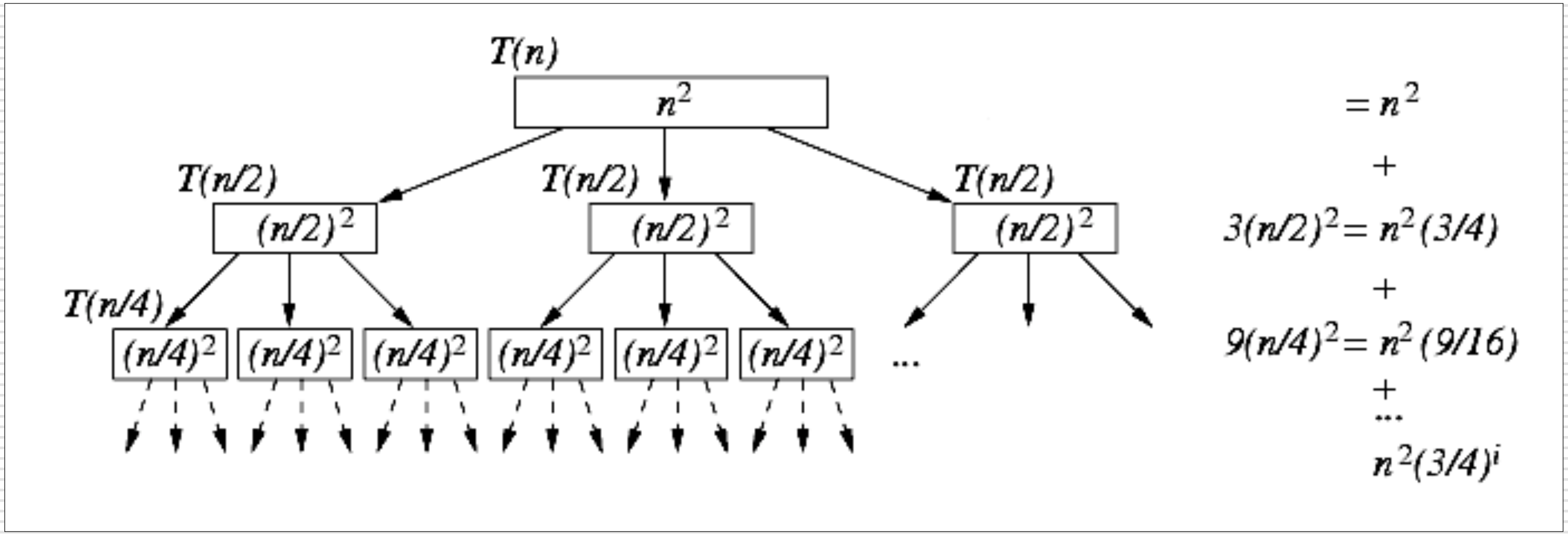
- Risolviamolo con l'albero di ricorsione

- Quale caso del teorema master si applica?

Albero di ricorsione

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{if } n = 1, \\ 3T(n/2) + n^2 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

- Ecco l'albero:



Somma dei costi esterni

- otteniamo:

$$T(n) = n^2 \sum_{i=0}^{?} \left(\frac{3}{4}\right)^i .$$

- Serie geometrica convergente, $T(n) = \Theta(n^2)$

Calcolo esatto

- abbiamo:

$$T(n) = n^2 \sum_{i=0}^{\lg n} \left(\frac{3}{4}\right)^i .$$

- Usando le formule per le serie geometriche

$$T(n) = n^2 \frac{(3/4)^{\lg n+1} - 1}{(3/4) - 1} .$$

Calcolo esatto

- quindi:

$$
\begin{aligned}
T(n) &= n^2\frac{(3/4)^{\lg n+1}-1}{(3/4)-1} = -4n^2((3/4)^{\lg n+1}-1) \\
&= 4n^2(1-(3/4)^{\lg n+1}) = 4n^2(1-(3/4)(3/4)^{\lg n}) \\
&= 4n^2(1-(3/4)n^{\lg(3/4)}) = 4n^2(1-(3/4)n^{\lg 3-\lg 4}) \\
&= 4n^2(1-(3/4)n^{\lg 3-2}) = 4n^2(1-(3/4)(n^{\lg 3}/n^2)) \\
&= 4n^2-3n^{\lg 3}.
\end{aligned}
$$

E adesso …

Esercizi

Esercizi (problema 4.1)

- $T(n)=2T(n/2)+n^3$. 3° caso del T.M.
  $T(n)=\Theta(n^3)$
- $T(n)=T(9n/10)+n$. 3° caso del T.M.
  $T(n)=\Theta(n)$
- $T(n)=16T(n/4)+n^2$. 2° caso del T.M.
  $T(n)=\Theta(n^2 \log n)$
- $T(n)=7T(n/3)+n^2$. 3° caso del T.M.
  $T(n)=\Theta(n^2)$
- $T(n)=7T(n/2)+n^2$. 1° caso del T.M.
  $T(n)=\Theta(n^{\log 7})$

Esercizi (problema 4.1)

- $T(n)=2T(n/4)+\sqrt{n}$. 2° caso del T.M.

  $$T(n)=\Theta(\sqrt{n} \log n)$$

- $T(n)=T(n-1)+n$. Albero di ricorsione (telescoping)

  $$T(n)=\Theta(n^2)$$

- $T(n)=T(\sqrt{n})+1$. Sostituzione di variabili ($n=2^m$)

  $$T(n)=\Theta(\log \log n)$$

Esercizi (problema 4.4)

- $T(n)=3T(n/2)+n\log n$. 1° caso del T.M.
  $$T(n)=\Theta(n^{\log 3})$$
- $T(n)=5T(n/5)+n/\log n$. Sostituzione di variabili ($n=5^m$)
  $$T(n)=\Theta(n \log \log n)$$
- $T(n)=4T(n/2)+n^2\sqrt{n}$. 3° caso del T.M.
  $$T(n)=\Theta(n^2\sqrt{n})$$
- $T(n)=3T(n/3 + 5)+ n/2$. Lemma 1
  $$T(n)=\Theta(n \log n)$$
- $T(n)=2T(n/2)+n/\log n$. Sostituzione di variabili ($n=2^m$)
  $$T(n)=\Theta(n \log \log n)$$

Esercizi (problema 4.4)

- $T(n)=T(n/2)+T(n/4)+T(n/8) + n$. Albero di ricorsione e dim. per ind.

  $$T(n)=\Theta(n)$$

- $T(n)=T(n-1)+1/n$. Serie armonica (telescoping)

  $$T(n)=\Theta(\log n)$$

- $T(n)=T(n-1)+\log n$. Telescoping

  $$T(n)=\Theta(n \log n)$$

- $T(n)=T(n-2)+2\log n$. Telescoping e sostituzione di variabili (n=2k)

  $$T(n)=\Theta(n \log n)$$

- $T(n)=\sqrt{n}T(\sqrt{n})+n$. Sostituzione di variabili ($n=2^m$)

  $$T(n)=\Theta(n \log \log n)$$