Algoritmi (9 CFU)

(A.A. 2009-10)

Probabilità e Algoritmi randomizzati

Overview

- Definiamo concetti di base di probabilità
- Variabili casuali e valore medio
- Algoritmi randomizzati
- Esempi ed Esercizi

Definizione e assiomi fondamentali.

- Le probabilità sono definite su uno spazio di campioni S, i cui elementi sono detti eventi. Si può pensare ad un evento come ad un sottoinsieme dello spazio dei campioni. Con S evento certo e $\varnothing$ evento nullo.
- Siano A e B due eventi qualsiasi (sottoinsiemi di S)
  - $0 \leq P(A) \leq 1$
  - $P(S) = 1$ e $P(\varnothing) = 0$
  - $P(A \vee B) = P(A) + P(B) - P(A \wedge B)$
- Distribuzione di Probabilità è uniforme se tutti gli eventi sono equiprobabili.

Altre Definizioni

- Due eventi A e B sono mutuamente esclusivi se $A \cap B = \emptyset$, ed in questo caso
  - $P(A \vee B) = P(A) + P(B)$
- Probabilità Condizionata
  - $P(A|B)= P(A \wedge B) /P(B)$
- Eventi Indipendenti
  - $P(A|B)=P(A)$
  - $P(B|A)=P(B)$
- Se A e B sono indipendenti

$$P(A \wedge B)=P(A)\bullet P(B)$$

Variabile casuale

- Una variabile casuale è una funzione X che associa un numero reale ad un evento, ovvero l'evento è
  - X=x (la variabile casuale X assume il valore x)
- Valore atteso (o valor medio)
  - $E[X]=\sum_x xP(X=x)$ (per probabilità discrete)
- Linearità del valore atteso
  - $E[X+Y]=E[X]+E[Y]$
- Varianza (dispersione delle probabilità attorno al valore atteso)
  - $Var[X]=E[(X-E[X])^2] = E[X^2]-E^2[X]$

Esercizi

- Il Professor R lancia una moneta una volta. Il Professor G lancia una moneta 2 volte. Qual è la probabilità che R ottenga più teste di G ?
- Contiamo:
  - Eventi per R {T, C}
  - Eventi per G {TT, TC, CT, CC}
  - Globale {T-TT, T-TC, T-CT, T-CC, C-TT, C-TC, C-CT, C-CC}
- Un caso su otto va bene quindi 1/8

Esercizi

- Da un mazzo di 10 carte numerate dall'uno al dieci ne vengono rimosse 3. Qual è la probabilità che le tre carte scelte siano in ordine crescente?
- Contiamo:
  - Spazio dei campioni, tutte le permutazioni, ossia 10!
  - Gli eventi vincenti sono le permutazioni i cui primi 3 elementi sono in ordine crescente. Gli altri 7 elementi non importa in che ordine sono.
  - 6 sono le possibili permutazioni di 3 elementi, una sola delle quali è quella ordinata.
- Quindi 1/6

Esercizi

- Dimostrare che

$$P(A|B)+P(\neg A|B)=1$$

- DIM:
  - $P(A|B)= P(A \wedge B) /P(B)$
  - $P(\neg A|B)= P(\neg A \wedge B) /P(B)$
  - $A \wedge B$ e $\neg A \wedge B$ sono mutuamente esclusivi (intersezione nulla) quindi
  - $P(A \wedge B) + P(\neg A \wedge B) = P((A \wedge B)\vee(\neg A \wedge B))=P(B)$

- Quindi $P(B)/P(B)=1$

Esercizi

- Vengono lanciati due dadi.
- Qual è il valore atteso della somma?
  - $E[X_1 + X_2] = E[X_1] + E[X_2] = 3.5 + 3.5 = 7$
- Qual è il valore atteso del massimo tra i due valori?
  - 36 possibili casi : {(1,1), (1,2),…, (6,5), (6,1)} tutti equiprobabili
    - Di coppie con "6" ne abbiamo 11
    - Di coppie con "5" ma senza 6 ne abbiamo 9
    - Di coppie con "4" ma senza 5 o 6 be abbiamo 7
    - Di coppie con "3" ma senza 4,5, o 6 ne abbiamo 5
    - Di coppie con "2" ma senza 3,4,5 o 6 ne abbiamo 3
    - Di coppie con solo "1" ne abbiamo una sola.
  - Quindi $E[X]=[6\bullet 11+5\bullet 9+ 4\bullet 7+ 3\bullet 5+ 2\bullet 3+1]/36=4.47$

Esercizi

- Un array A[1..n] contiene n numeri distinti ordinati a caso, e ciascuna permutazione è equiprobabile.
- Qual è il valore atteso dell'indice dell'elemento massimo?
  - P[Max=i]= P[Max=j] per ogni i e per ogni j diverso da i.
  - Inoltre Max=1, Max=2, …, Max=n sono tutti eventi mutuamente esclusivi e rappresentano tutto lo "spazio" dei campioni.
  - Quindi P [Max=i]= 1/n per ogni i.
  - Quindi E[X]=[1+2+3+4+…+n]/n=(n+1)/2
  - Ovvero il punto di mezzo!

Problema

- Considera l’algoritmo per trovare il massimo in una lista di elementi (cfr. il problema delle assunzioni)

```
Max=1;
for (i=2, i <=n; i++)
    if (A[i] > Max) Max=i;
```

- Quante volte cambia il valore del Max?
- Caso peggiore O(n).
- E nel caso medio?

Analisi probabilistica

- Facciamo delle assunzioni sulla distribuzione degli input
- Su questa distribuzione calcoliamo i valori attesi
- Quindi bisogna caratterizzare la distribuzione in maniera ragionevole (rispetto all problema)
- Un algoritmo è randomizzato se il suo comportamento dipende da un generatore di numeri casuali

Variabili casuali indicatrici

- Tecnica semplice ma potente per calcolare il valore atteso di una variabile casuale
- Dato un evento A definiamo, la variabile casuale indicatrice, I come
  - I{A}=1 se A si verifica, 0 se A non si verifica

LEMMA: Sia A un evento e sia $X_A = I\{A\}$. Allora $E[X_A] = P(A)$

Dim. Sia $\neg A$ il complemento di A, allora

$E[X_A] = E[I\{A\}] = 1P(A) + 0P(\neg A) = P(A)$

Esempio

- Determina il numero atteso di “testa” quando si lancia una moneta una volta
  - Spazio degli eventi {T,C}
  - P(T)=P(C)=1/2
  - X_T=I(T) = P(T) = 1/2
- Determina il numero atteso di “testa” quando si lancia una moneta “n” volte
  - Se X è la variabile casuale che indica il numero di volte che esce testa in “n” lanci allora

    $$E[X]=\sum k\, P(X=k)$$

  - Se usiamo variabili indicatrici X_i=I{i-esimo lancio esce testa}

    $$E[X]=\sum X_i$$

Esempio (cont.)

- $E[X_i]=P(X_i)$
- Numero atteso di "testa"

$$E[X]=E[\sum X_i]=\sum E[X_i]= \sum 1/2=n/2$$

Problema del massimo

- L'array A è "random"
- X variabile casuale che ci dice il numero di volte che il massimo cambia
- Definiamo X_i=I{A[i] è maggiore di tutti i precedenti}
- Quindi $X = X_1+X_2+ \ldots X_n$ e $E[X_i]$=P(i è maggiore dei prec.)
- P(i è maggiore dei prec.)=?? Assumendo distribuzione uniforme, la probabilità che il massimo tra i primi i sia in posizione i è 1/i, quindi

$$E[X_i]=1/i$$

- Da cui ricaviamo che

$$E[X]=E[\sum X_i]=\sum E[X_i]= \sum 1/i=\ln n + O(1)$$

Permutare un array

- Random(a,b) è una funzione che ritorna un numero intero compreso tra a e b, tutti egualmente probabili.
- Data un'array A

```
Randomize(A)
   for (i = 1; i<=n; i++)
      Scambia(A[i], A[Random(i,n)])
```

- Costo O(n)

Esercizi

1. Avete una "moneta" truccata che ritorna Testa con probabilità p e Croce con probabilità 1-p, dove $p \neq 1/2$. Come fare a generare T o C entrambe con probabilità 1/2 usando tale moneta?
2. In un ristorante, ognuno dei clienti consegna il suo cappello ad un inserviente all'ingresso. All'uscita, l'inserviente restituisce i cappelli ai clienti in ordine casuale. Qual è il numero atteso di clienti che riceveranno il loro cappello?
3. Data un'array A di n interi distinti. Qual è il numero atteso di inversioni nell'array?

Esercizio 1:

1. Avete una “moneta” truccata che ritorna Testa con probabilità p e Croce con probabilità 1-p, dove p≠ 1/2. Come fare a generare T o C entrambe con probabilità 1/2 usando tale moneta?

- Proviamo così

```
Moneta_Onesta()
    while 1 {
        x= Lancio_moneta_falsa
        y= Lancio_moneta_falsa
        If (x≠y) return x
}
```

- P(x=T)=P(x=T e y=C)=p(1-p)
- P(x=C)=P(x=C e y=T)=(1-p)p
- Uguali e a somma 1, quindi entrambe 1/2

Esercizio 2:

2. In un ristorante, ognuno dei clienti consegna il suo cappello ad un inserviente all'ingresso. All'uscita, l'inserviente restituisce i cappelli ai clienti in ordine casuale. Qual è il numero atteso X di clienti che riceveranno il proprio cappello ?

- Proviamo così
- X_i=I[cliente i riceve il proprio cappello]
- $P[X_i=1]=1/n$ (distribuzione uniforme) e quindi $E[X_i]=1/n$
- $X=X_1+X_2+\ldots+X_n$
- $E[X]=E[\sum X_i]=\sum E[X_i]=\sum 1/n=1$

Esercizio 3:

2. Data un'array A di n interi distinti. Qual è il numero atteso di inversioni nell'array?

- Ancora variabili indicatrici ma con 2 indici
- $X_{ij}=I[A[i]>A[j] \text{ e } i < j]$
- $P[X_{ij}=1]=1/2$ (distribuzione uniforme) e quindi $E[X_{ij}]=1/2$
- $X=\sum_{i=1}\sum_{j=i+1}X_{ij}$

$$E[X]=E[\sum_{i=1}\sum_{j=i+1}X_{ij}]= \sum_{i=1}\sum_{j=i+1} E[X_{ij}]=$$
$$=\sum_{i=1}\sum_{j=i+} 1/2=n(n-1)/4$$