

DECIDIBILITA' DI PREDICATI (O DI PROBLEMI)

- UN PREDICATO n -ARIO E' UNA FUNZIONE

$$M : N^n \rightarrow \{\underline{\text{true}}, \underline{\text{false}}\}$$

- CONSIDEREREMO SOLO PREDICATI TOTALI

- AD OGNI PREDICATO M VIENE ASSOCIATA LA SUA FUNZIONE CARATTERISTICA

$$C_M(\vec{x}) = \begin{cases} 1 & \text{SE } M(\vec{x}) = \underline{\text{true}} \\ 0 & \text{SE } M(\vec{x}) = \underline{\text{false}} \end{cases}$$

(PRATICAMENTE, NEL PASSAGGIO DA M A C_M ABBIAMO OPERATO LA SEGUENTE IDENTIFICAZIONE:

$$\begin{array}{l} \underline{\text{true}} \iff 1 \\ \underline{\text{false}} \iff 0 \end{array}$$

DEFINIZIONE

IL PREDICATO $M: \mathbb{N}^n \rightarrow \{\underline{\text{true}}, \underline{\text{false}}\}$ È DECIDIBILE
SE LA SUA FUNZIONE CARATTERISTICA χ_M È CALCOLABILE,

ESEMPIO

SI CONSIDERI IL PREDICATO " $x=0$ ".
LA SUA FUNZIONE CARATTERISTICA È

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{SE } x=0 \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

IL PROGRAMMA

$J(1, 2, 3)$

$J(1, 1, 4)$

$S(2)$

$T(2, 1)$

CALCOLA $g(x)$ È
PERTANTO IL PREDICATO
" $x=0$ " È DECIDIBILE

ESERCIZIO

1. DIMOSTRARE CHE I SEGUENTI PREDICATI SONO DECIDIBILI

(a) ' $x < y$ '

(b) ' $x \neq 3$ '

(c) ' x È PARI'

CALCOLABILITÀ SU ALTRI DOMINI

- È POSSIBILE GENERALIZZARE I CONCETTI DI DECIDIBILITÀ E CALCOLABILITÀ A FUNZIONI $f: D \rightarrow D$ PER DOMINI $D \neq \mathbb{N}$?
- TALE DOMANDA È INTERESSANTE SOLO SE
 - D È INFINITO
 - D È NUMERABILE
- LA RISPOSTA È AFFERMATIVA, PURCHÉ ESISTA UN MODO EFFETTIVO PER MAPPARE IL DOMINIO D SU \mathbb{N}

- IN ALTRE PAROLE SI RICHIEDE UNA CODIFICA EFFETTIVA DI $D: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ CHE SIA \mathbb{N}
 - INIETTIVA
 - (SURIETTIVA)
 - "EFFETTIVAMENTE" CALCOLABILE
 - "EFFETTIVAMENTE" INVERTIBILE

DEFINIZIONE SIA D UN DOMINIO NUMERABILE E

SIA $\alpha: D \rightarrow \mathbb{N}$ UNA CODIFICA EFFETTIVA DI D .

SIA $f: D \rightarrow D$ UNA FUNZIONE PARZIALE.

DIREMO CHE f E' CALCOLABILE SE E SOLO SE

LA FUNZIONE $f^*: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ DEFINITA DA

$f^* = \alpha^{-1} \circ f \circ \alpha$ E' CALCOLABILE.

ESEMPIO

SI CONSIDERI LA FUNZIONE $f(x) = x-1$ SU \mathbb{Z} .

UNA POSSIBILE CODIFICA EFFETTIVA DI \mathbb{Z} È:

$$\alpha(x) = \begin{cases} 2x & \text{SE } x \geq 0 \\ -2x-1 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

SI HA:

$$\alpha^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}y & \text{SE } y \text{ È PARI} \\ -\frac{1}{2}(y+1) & \text{ALTRIMENTI} \end{cases} \quad f^* = \alpha^{-1} \circ f \circ \alpha$$

PERTANTO LA FUNZIONE $f^*: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ È DATA DA

$$f^*(x) = \begin{cases} 1 & \text{SE } x = 0 \\ x-2 & \text{SE } x > 0 \text{ E } x \text{ È PARI} \\ x+2 & \text{SE } x \text{ È DISPARI} \end{cases}$$

SI DIMOSTRA
CHE f^* È
CALCOLABILE

ESERCIZI

1. SI DIMOSTRI CHE LA FUNZIONE $f(x) = 2x$
(DEFINITA SU \mathbb{Z}) È CALCOLABILE
2. SI DIMOSTRI CHE IL PREDICATO ' $x \geq 0$ ' È
DECIDIBILE IN \mathbb{Z}

GENERAZIONE DI FUNZIONI CALCOLABILI

LEMMA (FUNZIONI DI BASE)

LE SEGUENTI FUNZIONI SONO CALCOLABILI:

1) FUNZIONE IDENTICAMENTE NULLA

$$\underline{0}(x) = 0 \quad [\lambda x. 0]$$

2) FUNZIONE SUCCESSORE

$$\lambda x. x + 1$$

3) PROIEZIONI

$$U_i^n(x_1, \dots, x_n) = x_i$$

$$[\lambda x_1 \dots x_n. x_i]$$

DMY.

1) $Z(1)$ CALCOLA $\underline{0}$

2) $S(1)$ CALCOLA $x + 1$

3) $T(i, 1)$ CALCOLA U_i^n

FAREMO VEDERE CHE L'INSIEME DELLE FUNZIONI
CALCOLABILI E' CHIUSO RISPETTO A

- COMPOSIZIONE
- RICORSIONE
- MINIMALIZZAZIONE

A QUESTO FINE CI SERVIRA' COMPORRE |

PROGRAMMI IN MODI DIVERSI

CONCATENAZIONE DI PROGRAMMI

- SIANO P E Q DUE PROGRAMMI (CON P DI LUNGH. s)
- PER CONCATENARE P E Q IN MODO TALE CHE Q VENGA ESEGUITO CORRETTAMENTE NON APPENA P TERMINA OCCORRE CHE:
 - P TERMINI SEMPRE CON IL CONTATORE IN PROGRAMMA UGUALE AD $s+1$
 - LE ETICHETTE DELLE ISTRUZIONI DI JUMP DI Q SIANO OPPORTUNAMENTE MODIFICATE, PER TENERE CONTO DEL FATTO CHE L' i -ESIMA ISTRUZIONE DI Q CORRISPONDE ALLA $(s+i)$ -ESIMA ISTRUZIONE

DEFINIZIONE

UN PROGRAMMA P DI LUNGHEZZA S È IN FORMA STANDARD SE PER OGNI ISTRUZIONE $J(m, m, q)$ IN P VALE $q \leq S+1$.

LEMMA SIA P UN PROGRAMMA DI LUNGHEZZA S IN FORMA STANDARD. QUANDO P SI FERMA IL CONTATORE DI PROGRAMMA VALE $S+1$.

- È POSSIBILE TRASFORMARE UN QUALUNQUE PROGRAMMA P IN UNO IN FORMA STANDARD P^* IN MODO TALE CHE IL SIGNIFICATO DI P SIA PRESERVATO?

SOLUZIONE DEL I PROBLEMA

LEMMA

PER OGNI PROGRAMMA P ESISTE UN PROGRAMMA P^* IN FORMA STANDARD TALE CHE OGNI COMPUTAZIONE DI P^* È IDENTICA ALLA CORRISPONDENTE COMPUTAZIONE DI P , CON LA SOLA ECCEZIONE DEL VALORE DEL CONTATORE DI PROGRAMMA ALLA FINE DELLA COMPUTAZIONE.

IN PARTICOLARE, PER OGNI $a_1, a_2, \dots, a_n, b \in \mathbb{N}$ SI HA:

$P(a_1, \dots, a_n) \downarrow b$ SE E SOLO SE $P^*(a_1, \dots, a_n) \downarrow b$,

E QUINDI $f_P^{(n)} = f_{P^*}^{(n)}$, PER OGNI $n \in \mathbb{N}$.

DIM. SIA $P = I_1, I_2, \dots, I_s$.

SI PONGA $P^* =_{\text{def}} I_1^*, I_2^*, \dots, I_s^*$ CON

$$I_j^* = \begin{cases} J(m, n, s+1) & \text{SE } I_j = J(m, n, q) \text{ CON } q > s+1 \\ I_j & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

IL LEMMA SI DIMOSTRA PER INDUZIONE. ■

ESEMPIO

$$P = J(2, 3, 8)$$

$$S(1)$$

$$S(3)$$

$$J(1, 1, 1)$$

\rightarrow

$$P^* = J(2, 3, 5)$$

$$S(1)$$

$$S(3)$$

$$J(1, 1, 1)$$

$$f_p^{(2)} = f_{P^*}^{(2)} = \lambda xy \cdot x+y$$

SOLUZIONE AL II PROBLEMA

DATO UN PROGRAMMA P , INDICHIAMO CON $(P+l)$ IL PROGRAMMA CHE SI OTTIENE SOSTITUENDO IN P CIASCUNA ISTRUZIONE $J(m, n, q)$ CON $J(m, n, q+l)$, LASCIANDO INVARIATE LE ALTRE ISTRUZIONI.

ESEMPIO

$$\begin{array}{l} P = J(2, 3, 5) \\ \quad S(1) \\ \quad S(3) \\ \quad J(1, 1, 1) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} (P+3) = J(2, 3, 8) \\ \quad S(1) \\ \quad S(3) \\ \quad J(1, 1, 4) \end{array}$$

DEFINIZIONE

DATI DUE PROGRAMMI P E Q , CON $s = \text{length}(P)$,
LA CONCATENAZIONE DI P E Q , SCRITTA PQ
OPPURE $\begin{matrix} P \\ Q \end{matrix}$, È IL PROGRAMMA LE CUI PRIME
 s ISTRUZIONI COINCIDONO CON QUELLE DI P E
LE CUI SUCCESSIVE ISTRUZIONI COINCIDONO CON
QUELLE DI $(Q+s)$.

LEMMA

- $(PQ)R = P(QR)$
- SE P E Q SONO PROGRAMMI IN FORMA STANDARD,
ANCHE PQ È IN FORMA STANDARD.

ESempio SIA

$$P = J(2, 3, 6)$$
$$S(1)$$
$$S(3)$$
$$J(1, 1, 1)$$

↑
IN FORMA
STANDARD

$$P' = J(2, 3, 5)$$
$$S(1)$$
$$S(3)$$
$$J(1, 1, 1)$$

ALLORA:

$$PP = J(2, 3, 6)$$
$$S(1)$$
$$S(3)$$
$$J(1, 1, 1)$$
$$J(2, 3, 10)$$
$$S(1)$$
$$S(3)$$
$$J(1, 1, 5)$$

↑
IN FORMA
STANDARD

$$P'P' = J(2, 3, 5)$$
$$S(1)$$
$$S(3)$$
$$J(1, 1, 1)$$
$$J(2, 3, 9)$$
$$S(1)$$
$$S(3)$$
$$J(1, 1, 5)$$

- LA SEMPLICE CONCATENAZIONE DI DUE PROGRAMMI NON BASTA PER OTTENERE LA COMPOSIZIONE DELLE RISPETTIVE FUNZIONI, IN QUANTO LE AREE DI LAVORO DEI DUE PROGRAMMI POTREBBERO SOVRAPPORSI CON EFFETTI NEGATIVI

- PONIAMO:

- $\rho(Z(m)) =_{\text{def}} \rho(S(m)) =_{\text{def}} n$
- $\rho(T(m,m)) =_{\text{def}} \rho(J(m,m,q)) =_{\text{def}} \text{max}(m,m)$
- $\rho(I_1, \dots, I_s) = \text{max}_{i=1, \dots, s} \rho(I_i)$

- PERTANTO, SE $s > \rho(P)$, IL REGISTRO R_s NON SARÀ NE' CONSULTATO, NE' CAMBIATO DURANTE ALCUNA COMPUTAZIONE DI P

- SE $l_1, l_2, \dots, l_n > m$, USEREMO LA SEGUENTE NOTAZIONE

$$R_e \leftarrow f_p(R_{l_1}, \dots, R_{l_n})$$

PER INDICARE IL SEGUENTE PROGRAMMA:

$T(l_1, 1)$
 \vdots
 $T(l_m, m)$] COPIA R_{l_1}, \dots, R_{l_n} IN R_1, \dots, R_n

$Z(m+1)$
 \vdots
 $Z(p(P))$] AZZERA L'AREA DI LAVORO DI P

P] COPIA DI $(P + \max(m, p(P)))$

$T(1, l)$] COPIA L'OUTPUT IN R_l

COMPOSIZIONE DI FUNZIONI

- VERIFICHIAMO CHE L'INSIEME DELLE FUNZIONI URM-CALCOLABILI È CHIUSO RISPETTO ALLA COMPOSIZIONE DI FUNZIONI

TEOREMA

SIANO $f(y_1, \dots, y_k)$, $g_1(\vec{x})$, \dots , $g_k(\vec{x})$ FUNZIONI CALCOLABILI
CON $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$.

ALLORA LA FUNZIONE

$$h(\vec{x}) =_{df} f(g_1(\vec{x}), \dots, g_k(\vec{x}))$$

È CALCOLABILE,

[SI OSSERVA CHE $h(\vec{x}) \downarrow$ SE E SOLO SE

1. $g_1(\vec{x}) \downarrow, \dots, g_k(\vec{x}) \downarrow$

2. $f(g_1(\vec{x}), \dots, g_k(\vec{x})) \downarrow$]

DN.

SIANO F, G_1, \dots, G_k PROGRAMMI IN FORMA STANDARD CHE
CALCOLANO f, g_1, \dots, g_k , RISPETTIVAMENTE.

SIA $m = \max(p(F), p(G_1), \dots, p(G_k), k, m)$

ALLORA IL PROGRAMMA

$$\left. \begin{array}{l} T(1, m+1) \\ \vdots \\ T(m, m+n) \end{array} \right\} \text{RICOPIA L'INPUT IN} \\ \text{UN'AREA SICURA}$$

$R_{m+m+1} \leftarrow f_{G_1}(R_{m+1}, \dots, R_{m+n})$

\vdots
 $R_{m+m+k} \leftarrow f_{G_k}(R_{m+1}, \dots, R_{m+n})$

$R_1 \leftarrow f_F(R_{m+n+1}, \dots, R_{m+m+k})$

CALCOLA LA FUNZIONE h . ■

LE SEGUENTI SOSTITUZIONI DI VARIABILI

$$h_1(x_1, x_2) =_{df} f(x_2, x_1) \quad (\text{PERMUTAZIONE})$$

$$h_2(x) =_{df} f(x, x) \quad (\text{IDENTIFICAZIONE})$$

$$h_3(x_1, x_2, x_3) =_{df} f(x_2, x_3) \quad (\text{INTRODUZIONE DI VARIABILI "DUMMY"})$$

IN UNA FUNZIONE CALCOLABILE GENERANO FUNZIONI
CALCOLABILI, IN VIRTU' DEL SEGUENTE COROLLARIO.

COROLLARIO

SIA $f(y_1, \dots, y_k)$ UNA FUNZIONE CALCOLABILE

SIA $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}$ UNA SEQUENZA DI VARIABILI, CON

$i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$ (CON POSSIBILI RIPETIZIONI)

SIA $h(x_1, \dots, x_n) \stackrel{\text{def}}{=} f(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$

ALLORA h È CALCOLABILE.

DIM.

È SUFFICIENTE OSSERVARE CHE

$$h(\vec{x}) = f(U_{i_1}^m(\vec{x}), \dots, U_{i_k}^m(\vec{x}))$$

CON $\vec{x} = (x_1, \dots, x_m)$, ■

ESEMPIO

LA FUNZIONE $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3$ È CALCOLABILE

INFATTI, SIA $g(x, y) = x + y$.

SI HA:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= g(g(x_1, x_2), x_3) \\ &= g(g(U_1^3(\vec{x}), U_2^3(\vec{x})), U_3^3(\vec{x})) \end{aligned}$$

PERTANTO f È CALCOLABILE, IN QUANTO g

È CALCOLABILE. ▀

ESERCIZI

1, SI DIMOSTRI CHE PER OGNI $m \in \mathbb{N}$ LE SEGUENTI FUNZIONI SONO CALCOLABILI

(a) \underline{m} (DOVE $\underline{m}(x) = m \quad \forall x \in \mathbb{N}$)

(b) mx

2, SIA $f(x, y)$ CALCOLABILE ED $m \in \mathbb{N}$.

SIA $h(x) =_{\text{def}} f(x, m)$

SI DIMOSTRI CHE $h(x)$ E' CALCOLABILE

3, SIA $g(x)$ UNA FUNZIONE TOTALE E CALCOLABILE,

SI DIMOSTRI CHE IL SEGUENTE PREDICATO

$$M(x, y) =_{\text{def}} "g(x) = y"$$

E' DECIDIBILE