LA NOTAZIONE "↑" DI KNUTH

$$a \times b = \underbrace{a + a + \cdots + a}_{b \text{ copies of } a}$$

Es. $$4 \times 3 = \underbrace{4 + 4 + 4}_{3 \text{ copies of } 4} = 12$$

$$a \uparrow b = a^b = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{b \text{ copies of } a}$$

Es. $$4 \uparrow 3 = 4^3 = \underbrace{4 \times 4 \times 4}_{3 \text{ copies of } 4} = 64$$

$$a \uparrow\uparrow b = {}^{b}a = \underbrace{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}}_{b \text{ copies of } a} = \underbrace{a \uparrow (a \uparrow (\ldots \uparrow a))}_{b \text{ copies of } a}$$

(ASSOCIATIVITÀ A DESTRA)

ESEM

$$4 \uparrow\uparrow 3 = {}^{3}4 = \underbrace{4^{4^{4}}}_{3 \text{ copies of } 4} = \underbrace{4 \uparrow (4 \uparrow 4)}_{3 \text{ copies of } 4} = 4^{256} \approx 1.3 \times 10^{154}$$

$$3 \uparrow\uparrow 2 = 3^3 = 27$$

$$3 \uparrow\uparrow 3 = 3^{3^3} = 3^{27} = 7{,}625{,}597{,}484{,}987$$

$$3 \uparrow\uparrow 4 = 3^{3^{3^3}} = 3^{7625597484987}$$

$$3 \uparrow\uparrow 5 = 3^{3^{3^{3^3}}} = 3^{3^{7625597484987}}$$

$$a \uparrow\uparrow\uparrow b = \underbrace{a \uparrow\uparrow (a \uparrow\uparrow (\ldots \uparrow\uparrow a))}_{b \text{ copies of } a}$$

(ASSOCIATIVITA' A DESTRA)

$$3 \uparrow\uparrow\uparrow 2 = 3 \uparrow\uparrow 3 = 3^{3^3} = 3^{27} = 7,625,597,484,987$$

$$3 \uparrow\uparrow\uparrow 3 = 3 \uparrow\uparrow 3 \uparrow\uparrow 3 = 3 \uparrow\uparrow (3 \uparrow 3 \uparrow 3) = \underbrace{3 \uparrow 3 \uparrow \ldots \uparrow 3}_{3 \uparrow 3 \uparrow 3 \text{ copies of } 3} = \underbrace{3 \uparrow 3 \uparrow \ldots \uparrow 3}_{7,625,597,484,987 \text{ copies of } 3}$$

$$a \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow b = \underbrace{a \uparrow\uparrow\uparrow (a \uparrow\uparrow\uparrow (\ldots \uparrow\uparrow\uparrow a))}_{b \text{ copies of } a}$$

(ASSOCIATIVITA' A DESTRA)

$$a \underbrace{\uparrow\uparrow\ldots\uparrow}_{n} b = \underbrace{a \underbrace{\uparrow\ldots\uparrow}_{n-1} a \underbrace{\uparrow\ldots\uparrow}_{n-1} a \ \ldots \ a \underbrace{\uparrow\ldots\uparrow}_{n-1} a}_{b \text{ copies of } a}$$

(ASSOCIATIVITA' A DESTRA)

SI PONE

$$\underbrace{\uparrow\uparrow\ldots\uparrow}_{n} \equiv \uparrow^{(n)}$$

(ASSOCIATIVITA' A DESTRA)

QUINDI:

$$a \uparrow^{(n)} b = \underbrace{\left(a \uparrow^{(n-1)} \left(a \uparrow^{(n-1)} \left(a \ \ldots \left(a \uparrow^{(n-1)} a\right) \ldots\right)\right)\right)}_{b \text{ volte}}$$

PONIAMO: $\psi(x,y) = 2\uparrow^{(x-1)} y$

PER $x \geqslant 2,\ y \geqslant 1$

$x \backslash y$	0	1	2	3	4	...
0	?	?	?	?	?	...
1	?	?	?	?	?	...
2	?	x	x	x	x	...
3	?	x	x	x	x	...
4	?	x	x	x	x	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

RIMANE DA

- DEFINIRE $\psi(x,y)$ ANCHE PER $x < 2$ E $y = 0$
- TROVARE UNA RICORRENZA PER $\psi(x,y)$

IMPORREMO $\psi(x,y) \geqslant 1$ E $\psi(x,y)$ NON DECRESCENTE RISPETTO AD ENTRAMBI GLI ARGOMENTI

$$\boxed{\psi(x,y) = 2 \uparrow^{(x-1)} y}$$

$x \backslash y$	0	1	2	3	4	...
0	?	?	?	?	?	...
1	?	?	?	?	?	...
2	?	X	X	X	X	...
3	?	X	X	X	X	...
4	?	X	X	X	X	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

CASO BASE

$$\psi(x+1, y+1) = 2 \uparrow^{(x)} (y+1)$$

$$= \underbrace{2 \uparrow^{(x-1)} 2 \uparrow^{(x-1)} 2 \dots 2 \uparrow^{(x-1)} 2}_{y+1 \text{ COPIE DI } 2} \qquad [x \geq 2]$$

$$= 2 \uparrow^{(x-1)} \Big(\underbrace{2 \uparrow^{(x-1)} 2 \dots 2 \uparrow^{(x-1)} 2}_{y \text{ COPIE DI } 2} \Big) \qquad [y \geq 1]$$

$$= 2 \uparrow^{(x-1)} \left(2 \uparrow^{(x)} y \right)$$

$$= \psi(x, \psi(x+1, y))$$

RICORRENZA: $\psi(x+1, y+1) = \psi(x, \psi(x+1, y))$, $\quad x \geq 2, \; y \geq 1$

CASO BASE: $\begin{cases} \psi(2, y) = 2 \uparrow y = 2^y, & y \geq 1 \\ \psi(x, 1) = \uparrow^{(x-1)} 1 = 2, & x \geq 3 \end{cases}$

$$\boxed{\psi(x,y) = 2\uparrow^{(x-1)} y}$$

$$\boxed{\psi(x+1,y+1) = \psi(x,\psi(x+1,y)),\quad x \geq 2,\ y \geq 1}$$

x \ y	0	1	2	3	4	...
0	?	?	?	?	?	...
1	?	?	X	X	X	...
2	?	X	X	X	X	...
3	?	X	X	X	X	...
4	?	X	X	X	X	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

CASO BASE

ESTENDENDO LA RICORRENZA ANCHE PER $x = 1$ SI DEVE AVERE

$$\psi(2,y+1) = \psi(1,\psi(2,y))$$

MA

$$\psi(2,y+1) = 2\uparrow^{(1)}(y+1) = 2^{y+1}$$

$$\psi(1,\psi(2,y)) = \psi(1,2^{y}) \qquad \boxed{y \geq 1}$$

QUINDI DOVREBBE VALERE: $\psi(1,2^{y}) = 2^{y+1} = 2\cdot 2^{y}$

E' ALLORA SUFFICIENTE PORRE

CASO BASE: $\boxed{\psi(1,z) = 2\cdot z,\quad z \geq 2}$

$$\boxed{\psi(x,y) = 2\uparrow^{(x-1)} y}$$

$$\boxed{\psi(x+1,y+1) = \psi(x, \psi(x+1,y)), \quad x \geqslant 1, \; y \geqslant 1}$$

x \ y	0	1	2	3	4	....
0	?	?	?	?	6	...
1	?	?	X	X	X	...
2	?	X	X	X	X	...
3	?	X	X	X	X	...
4	?	X	X	X	X	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

CASO BASE

ESTENDENDO LA RICORRENZA ANCHE PER $x = 0$ SI DEVE AVERE

$$\psi(1, y+1) = \psi(0, \psi(1, y))$$

MA

$$\psi(1, y+1) = 2\cdot(y+1)$$

$$\psi(0, \psi(1, y)) = \psi(0, 2y) \qquad [y \geqslant 2]$$

QUINDI DOVREBBE VALERE: $\psi(0, 2y) = 2\cdot(y+1) = 2y+2$

E' ALLORA SUFFICIENTE PORRE

CASO BASE: $\boxed{\psi(0, z) = z+2, \quad z \geqslant 4}$

$$\psi(x,y) = 2\uparrow^{(x-1)} y$$

$$\psi(x+1, y+1) = \psi(x, \psi(x+1, y)), \quad x \geq 0,\ y \geq 1$$

x \ y	0	1	2	3	4	...
0	1	?	4	?	6	...
1	1	2	x	x	x	...
2	1	x	x	x	x	...
3	1	x	x	x	x	...
4	1	x	x	x	x	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

ESTENDENDO LA RICORRENZA ANCHE PER $y = 0$ SI DEVE AVERE

$$\psi(x+1, 1) = \psi(x, \psi(x+1, 0))$$

MA

$$\psi(x+1, 1) = 2\uparrow^{(x)} 1 = 2 \qquad [x \geq 1]$$

QUINDI DOVREBBE VALERE:

$$2 = \psi(x, \psi(x+1, 0)) = 2\uparrow^{(x-1)} \psi(x+1, 0)$$

E' ALLORA SUFFICIENTE PORRE

$$\boxed{\psi(z, 0) = 1}$$

INOLTRE, PER $x = 1$ SI AVREBBE

$$\psi(2,1) = \psi(1, \psi(2,0))$$

$$2 = \psi(1, \psi(2,0))$$

$$= \psi(1,1)$$

$$\boxed{\psi(1,1) = 2}$$

$$\boxed{\psi(0,2) = \psi(0, \psi(1,1)) = \psi(1,2) = 4}$$

$$\boxed{\psi(x,y) = 2 \uparrow^{(x-1)} y}$$

$$\psi(x+1, y+1) = \psi(x, \psi(x+1, y)), \quad x \geq 0,\ y \geq 0 \quad (x+y \geq 1)$$

$x \backslash y$	0	1	2	3	4	...
0	1	2	4	5	6	...
1	1	X	X	X	X	...
2	1	X	X	X	X	...
3	1	X	X	X	X	...
4	1	X	X	X	X	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

ESTENDENDO LA RICORRENZA ANCHE PER $x=0,\ y=0$

$$\psi(1,1) = \psi(0, \psi(1,0))$$

MA $\psi(1,1) = 2$,

QUINDI $2 = \psi(0, \psi(1,0))$

$$= \psi(0,1)$$

OTTENIAMO $\boxed{\psi(0,1) = 2}$.

INFINE, PONENDO $\psi(0,3) = 5$ SI OTTIENE

$\psi(0,x) = x+2$, PER OGNI $x \geq 2$

$$\psi(x,y) = 2 \uparrow^{(x-1)} y$$

$$\psi(x+1, y+1) = \psi(x, \psi(x+1, y)), \quad x \geq 0,\ y \geq 0$$

$x \backslash y$	0	1	2	3	4	...
0	1	2	4	5	6	...
1	1	X	X	X	X	...
2	1	X	X	X	X	...
3	1	X	X	X	X	...
4	1	X	X	X	X	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

FUNZIONE DI ACKERMANN

$$\begin{cases} \psi(x,0) = 1 \\ \psi(0,y) = \begin{cases} 1 & \text{SE } y = 0 \\ 2 & \text{SE } y = 1 \\ y+2 & \text{SE } y \geq 2 \end{cases} \\ \psi(x+1, y+1) = \psi(x, \psi(x+1, y)), \quad x, y \geq 0 \end{cases}$$

$\varphi(x,y)$

$x \backslash y$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	
0	1	2	4	5	6	7	8	9	10	...
1	1	$2\cdot 1$	$2\cdot 2$	$2\cdot 3$	$2\cdot 4$	$2\cdot 5$	$2\cdot 6$	$2\cdot 7$	$2\cdot 8$	...
2	1	$2\uparrow 1$	$2\uparrow 2$	$2\uparrow 3$	$2\uparrow 4$	$2\uparrow 5$	$2\uparrow 6$	$2\uparrow 7$	$2\uparrow 8$	...
3	1	$2\uparrow^2 1$	$2\uparrow^2 2$	$2\uparrow^2 3$	$2\uparrow^2 4$	$2\uparrow^2 5$	$2\uparrow^2 6$	$2\uparrow^2 7$	$2\uparrow^2 8$	...
4	1	$2\uparrow^3 1$	$2\uparrow^3 2$	$2\uparrow^3 3$	$2\uparrow^3 4$	$2\uparrow^3 5$	$2\uparrow^3 6$	$2\uparrow^3 7$	$2\uparrow^3 8$	...
5	1	$2\uparrow^4 1$	$2\uparrow^4 2$	$2\uparrow^4 3$	$2\uparrow^4 4$	$2\uparrow^4 5$	$2\uparrow^4 6$	$2\uparrow^4 7$	$2\uparrow^4 8$	...
6	1	$2\uparrow^5 1$	$2\uparrow^5 2$	$2\uparrow^5 3$	$2\uparrow^5 4$	$2\uparrow^5 5$	$2\uparrow^5 6$	$2\uparrow^5 7$	$2\uparrow^5 8$	...
7	1	$2\uparrow^6 1$	$2\uparrow^6 2$	$2\uparrow^6 3$	$2\uparrow^6 4$	$2\uparrow^6 5$	$2\uparrow^6 6$	$2\uparrow^6 7$	$2\uparrow^6 8$	...
8	1	$2\uparrow^7 1$	$2\uparrow^7 2$	$2\uparrow^7 3$	$2\uparrow^7 4$	$2\uparrow^7 5$	$2\uparrow^7 6$	$2\uparrow^7 7$	$2\uparrow^7 8$	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

LEMMA A $\psi(x,y) \leq \psi(x+1,y)$, PER OGNI $x,y \geq 0$

LEMMA B $\psi(x,y+k) + y \leq \psi(x,y+k+1)$,

PER OGNI $x \geq 2$ E $k,y \geq 0$

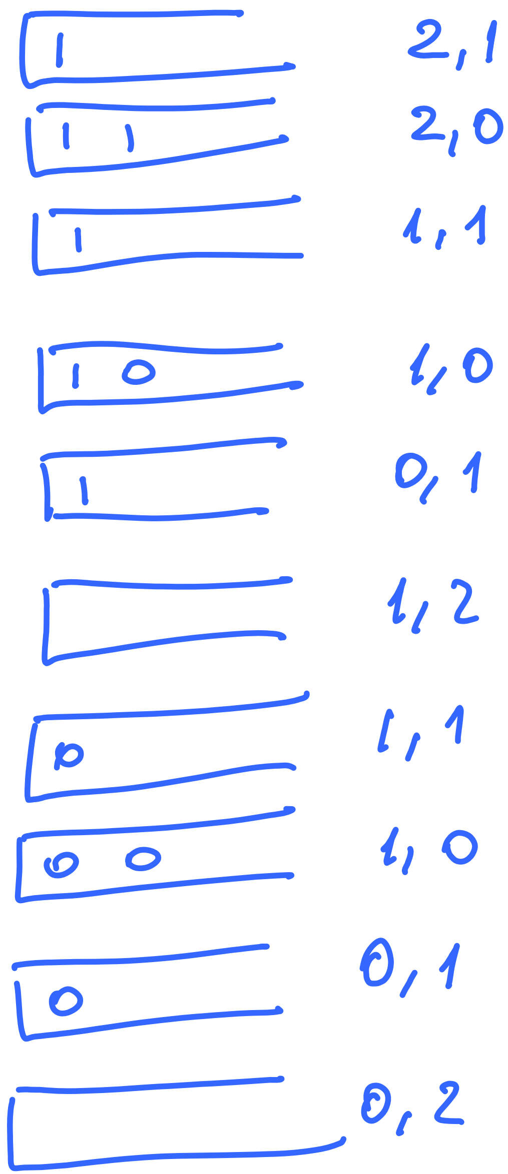
LEMMA C PER OGNI $\bar{x},\bar{k} \geq 0$ ASSEGNATI, SI HA

$$\psi(\bar{x},y+\bar{k}) < \psi(\bar{x}+1,y)$$

PER OGNI y SUFFICIENTEMENTE GRANDE

CALCOLABILITÀ DELLA FUNZIONE $\psi(x,y)$

$$
\begin{aligned}
\psi(2,2) &= \psi(1, \psi(2,1)) \\
&= \psi(1, \psi(1, \underline{\psi(2,0)})) \\
&= \psi(1, \psi(1,1)) \\
&= \psi(1, \psi(0, \psi(1,0))) \\
&= \psi(1, \underline{\psi(0,1)}) \\
&= \psi(1,2) \\
&= \psi(0, \psi(1,1)) \\
&= \psi(0, \psi(0, \underline{\psi(1,0)})) \\
&= \psi(0, \underline{\psi(0,1)}) \\
&= \underline{\psi(0,2)} \\
&= 4
\end{aligned}
$$



STACK

ACKERMANN (x,y)

```
A:  if  x=0 OR y=0  then
        z := BASE_CASE_ACKERMANN (x,y)
        if  STACK_EMPTY( )  then
            return (z)
        else
            w := pop( )
            x := w
            y := z
            goto A
    else
        PUSH (x-1)
        y := y-1
        goto A
```

ACKERMANN(w,z)

ACKERMANN(x,y-1)

GESTIONE DELLO STACK

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \Longrightarrow \begin{cases} S = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{a_n} \\ n \end{cases}$$

$\uparrow$

TOP

QUINDI INIZIALMENTE $\begin{cases} S = 1 \\ n = 0 \end{cases}$ STACK VUOTO

STACK_EMPTY( ) $\equiv \overline{sg}(n)$

PUSH(x)

$n := n + 1$

$S := S \cdot p_n^{x}$

POP( )

$z := (S)_n$

$S := S / p_n^{z}$

$n := n - 1$

return z

- PER INDUZIONE SU (x,y) (NELL'ORDINAMENTO LESSICOGRAFICO) SI PUO' DIMOSTRARE CHE IL PROGRAMMA ACKERMANN(x,y) CALCOLA CORRETTAMENTE LA FUNZIONE $\psi(x,y)$

- PERTANTO LA FUNZIONE $\psi(x,y)$ E' CALCOLABILE

- DIAMO ADESSO ALCUNI CENNI PER DIMOSTRARE CHE LA FUNZIONE $\psi(x,y)$ NON E' PRIMITIVA RICORSIVA

LOOP PROGRAM

ISTRUZIONI: $Z(n)$, $S(n)$, $T(n,m)$

(*) LOOP(n)
P
END

SIA k IL VALORE DEL REGISTRO R_n AL MOMENTO DELL'ESECUZIONE DI (*). SI ESEGUA IL PROGRAMMA P PER k VOLTE DI SEGUITO

- I LOOP PROGRAM SONO PARTICOLARI PROGRAMMI URM
- ESSI TERMINANO SEMPRE

GERARCHIA DEI LOOP PROGRAM

L : INSIEME DEI LOOP PROGRAM

L_n : INSIEME DEI LOOP PROGRAM CON PROFONDITÀ DI ANNIDAMENTO DELLE COPPIE LOOP-END MINORE O UGUALE A n

CHIARAMENTE $L = \bigcup_{n=0}^{\infty} L_n$

$\mathcal{L}_n$: INSIEME DELLE FUNZIONI CALCOLABILI DA PROGRAMMI IN L_n

- SI PUÒ DIMOSTRARE CHE $\mathcal{L}_n \subsetneq \mathcal{L}_{n+1}$, PER OGNI n.

TEOREMA $\quad PR = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}_n$

DIM (CENNI)

- LE FUNZIONI INIZIALI APPARTENGONO A $\mathcal{L}_0$
- $\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}_n$ E' CHIUSO RISPETTO A COMPOSIZIONE E A RICORSIONE PRIMITIVA

PERTANTO $\quad PR \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}_n$

PER QUANTO RIGUARDA L'INCLUSIONE INVERSA, SI PUÒ PROCEDERE PER INDUZIONE SU n DIMOSTRANDO:

$$\mathcal{L}_0 \subseteq PR$$

$$\mathcal{L}_n \subseteq PR \rightarrow \mathcal{L}_{n+1} \subseteq PR, \quad \text{PER OGNI } n$$

PERTANTO $\quad \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}_n \subseteq PR$, DA CUI IL TEOREMA $\blacksquare$

COMPLESSITA'

- SIA $P \in L$. PONIAMO:

$T_P(x_1, \ldots, x_m)$ = NUMERO COMPLESSIVO DI ESECUZIONI DI ISTRUZIONI DEL TIPO Z, S, T NEL CORSO DELLA COMPUTAZIONE DI $P(x_1, \ldots, x_m)$

VALE CHIARAMENTE IL SEGUENTE RISULTATO:

LEMMA $\quad P \in L_n \longrightarrow T_P \in \mathcal{L}_m$

BOUNDING THEOREM

SIA $P \in L_n$. ALLORA ESISTE k TALE CHE

$$T_p(x_1, \dots, x_m) \leq \psi(n, \max(x_1, \dots, x_m) + k)$$

$\blacksquare$

NOTA: VALE ANCHE IL SEGUENTE INVERSO DEL BOUNDING THEOREM.

TEOREMA SIA P UN LOOP PROGRAM CHE CALCOLA LA FUNZIONE $g(x_1, \dots, x_m)$. SE $T_p(x_1, \dots, x_m) \leq \psi(n, \max(x_1, \dots, x_m) + k)$, PER QUALCHE COSTANTE $n \geq 2$ E $k \geq 0$, ALLORA $g \in \mathcal{L}_n$.

$\blacksquare$

IL BOUNDING THEOREM E IL

<u>LEMMA</u> B $\psi(x, y+k) + y \leq \psi(x, y+k+1)$,

PER OGNI $x \geq 2$ E $k, y \geq 0$

IMPLICANO LA SEGUENTE LIMITAZIONE SULLE FUNZIONI CALCOLATE DA PROGRAMMI IN L_n

LEMMA SIA $g(x_1,\dots,x_m) \in \mathcal{L}_n$. ALLORA ESISTE k TALE CHE

$$g(x_1,\dots,x_m) \leq \psi(n, \max(x_1,\dots,x_m)+k).$$

DIM SIA $P \in L_n$ UN PROGRAMMA CHE CALCOLA $g(x_1,\dots,x_m)$.

PER IL BOUNDING THEOREM,

$$T_P(x_1,\dots,x_m) \leq \psi(n, \max(x_1,\dots,x_m)+h)$$

PER QUALCHE COSTANTE h. MA

$$\begin{aligned} \underline{g(x_1,\dots,x_m)} &\leq T_P(x_1,\dots,x_m) + \max(x_1,\dots,x_m) \\ &\leq \psi(n, \max(x_1,\dots,x_m)+h) + \max(x_1,\dots,x_m) \\ &\leq \psi(n, \max(x_1,\dots,x_m)+h+1), \end{aligned}$$

DA CUI IL LEMMA. $\blacksquare$

- DIMOSTRIAMO ADESSO CHE LA FUNZIONE $\psi(x,x)$ NON E' PRIMITIVA RICORSIVA (E QUINDI, A MAGGIOR RAGIONE, ANCHE LA FUNZIONE $\psi(x,y)$ NON PUÒ ESSERE PRIMITIVA RICORSIVA)

TEOREMA $\psi(x,x) \notin PR$.

DIM. SE $\psi(x,x) \in PR$, POICHE' $PR = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}_n$

SI AVREBBE $\psi(x,x) \in \mathcal{L}_n$, PER QUALCHE n,

QUINDI IL LEMMA PRECEDENTE IMPLICA CHE PER QUALCHE k

$\underline{\psi(x,x)} \leq \psi(n, x+k)$ (PER OGNI x).

MA PER IL LEMMA C VALE $\psi(n, x+k) < \psi(n+1, x)$,

SIA PURE SOLO PER x SUFFICIENTEMENTE GRANDI.

PERTANTO ESISTE $n_0 > n+1$ TALE CHE:

$$\psi(n_0, n_0) \leq \psi(n, n_0+k) < \psi(n+1, n_0) \underset{\Uparrow}{\leq} \psi(n_0, n_0).$$

LEMMA A

ASSURDO!

PERTANTO $\psi(x,x) \notin PR$, COME VOLEVASI DIMOSTRARE. ∎