PROGRAMMI UNIVERSALI

- SI CONSIDERI LA SEGUENTE FUNZIONE

$$\psi(x,y) =_{def} \phi_x(y)$$

- LA FUNZIONE $\psi(x,y)$ E' UNIVERSALE, IN QUANTO PONENDO

$$g_m(y) =_{def} \psi(m,y)$$

LA SEQUENZA

$$g_0, g_1, g_2, \ldots$$

CONTIENE TUTTE LE FUNZIONI (UNARIE) CALCOLABILI

DEFINIZIONE

LA FUNZIONE UNIVERSALE PER LE FUNZIONI n-ARIE CALCOLABILI E' LA FUNZIONE $(n+1)$-ARIA $\psi_U^{(n)}$ DEFINITA DA:

$$\psi_U^{(n)}(e, x_1, \ldots, x_n) = \phi_e^{(n)}(x_1, \ldots, x_n)$$

PROBLEMA

LE FUNZIONI $\psi_U^{(n)}$ SONO CALCOLABILI?

IN CASO POSITIVO, PER OGNI n ESISTEREBBE UN PROGRAMMA UNIVERSALE $\mathcal{U}^{(n)}$ IN GRADO DI CALCOLARE TUTTE LE FUNZIONI CALCOLABILI n-ARIE
(ESISTENZA DEI CALCOLATORI UNIVERSALI)

TEOREMA PER OGNI $n \geq 1$, LA FUNZIONE UNIVERSALE $\psi_U^{(n)}$ E' CALCOLABILE.

DIM. (INFORMALE)

- SIA $n \geq 1$ FISSATO
- DATI
  - UN INDICE e
  - UNA n-UPLA $\vec{x}$

  POSSIAMO CALCOLARE $\psi_U^{(n)}(e, \vec{x})$ COME SEGUE:
  - SI COSTRUISCA IL PROGRAMMA P_e
  - SI SIMULI P_e SULL' INPUT $\vec{x}$
- PER LA TESI DI CHURCH, $\psi_U^{(n)}$ E' CALCOLABILE ∎

TEOREMA PER OGNI $n \geq 1$, LA FUNZIONE UNIVERSALE $\psi_U^{(n)}(z, x_1, \dots, x_n)$ E' CALCOLABILE.

DIM. (FORMALE)

- UNO STATO $\vec{r} = (r_1, r_2, r_3, \dots)$ TALE CHE $r_i = 0$ PER i SUFFICIENTEMENTE GRANDE PUÒ ESSERE CODIFICATO IN MANIERA EFFETTIVA CON

$$cod(\vec{r}) = 2^{r_1} \cdot 3^{r_2} \cdot 5^{r_3} \cdot \dots = \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{r_i}$$

- QUINDI UNA CONFIGURAZIONE $(j, \vec{r})$ PUÒ ESSERE CODIFICATA CON $\pi(j, cod(\vec{r}))$

- DATI $z, \vec{x}, t$ INDICHIAMO CON $c_n(z, \vec{x}, t)$ LA CODIFICA DELLA CONFIGURAZIONE DELLA COMPUTAZIONE $P'_z(\vec{x})$ DOPO t PASSI, DOVE P'_z E' IL PROGRAMMA OTTENUTO DALLA FORMA STANDARD DEL PROGRAMMA P_z (DI CODICE z) ELIMINANDO DA QUESTI OGNI ISTRUZIONE DI JUMP INUTILE, CIOE' OGNI ISTRUZIONE $J(u, v, q)$ CON $q = \ell + 1$, DOVE ℓ E' L'INDICE DELL'ISTRUZIONE $J(u, v, q)$ IN QUESTIONE (OVVIAMENTE RIALLINEANDO OPPORTUNAMENTE LE ETICHETTE DELLE ISTRUZIONI DI JUMP RIMASTE)

- VERIFICHEREMO CHE LA FUNZIONE $c_n(z, \vec{x}, t)$ E' PRIMITIVA RICORSIVA

$$\begin{cases} c_n(z,\vec{x},0) = \pi(1, 2^{x_1} \cdot 3^{x_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{x_n}) \\ c_n(z,\vec{x},t+1) = \pi(j_n(z,\vec{x},t+1), st_n(z,\vec{x},t+1)) \end{cases}$$

CON

$j_n(z,\vec{x},t)$ (CONTATORE DI PROGRAMMA DOPO t PASSI)

$st_n(z,\vec{x},t)$ (STATO DEI REGISTRI DOPO t PASSI)

DEFINITI COME DI SEGUITO :

$$
j_n(z,\vec{x},t+1)=\begin{cases}
j_n(z,\vec{x},t)+1 & \text{- SE } 1\le j_n(z,\vec{x},t)<|P'_z| \text{ E L'ISTRUZIONE}\\
& j_n(z,\vec{x},t)\text{-ESIMA DI } P'_z \text{ E' DI TIPO } Z(u),\ S(u),\ T(u,v)\\
& \text{OPPURE E' DEL TIPO } J(u,v,q) \text{ E}\\
& \quad (\sigma_n(z,\vec{x},t))_u \neq (\sigma_n(z,\vec{x},t))_v\\[2ex]
q & \text{- SE } 1\le j(z,\vec{x},t)\le |P'_z|\text{, L'ISTRUZIONE}\\
& j(z,\vec{x},t)\text{-ESIMA DI } P'_z \text{ E' DEL TIPO } J(u,v,q),\\
& \text{CON } 1\le q\le |P'_z|\text{, E } (\sigma(z,\vec{x},t))_u=(\sigma(z,\vec{x},t))_v\\[2ex]
0 & \text{- ALTRIMENTI}
\end{cases}
$$

$$
st_n(z,\vec{x},t+1) = \begin{cases}
qt\left(p_u^{(st_n(z,\vec{x},t))_m},\ st_n(z,\vec{x},t)\right) & \text{- SE } 1 \le j_n(z,\vec{x},t) \le |P'_z| \text{ E L'ISTRUZIONE } j_n(z,\vec{x},t)\text{-ESIMA DI } P'_z \text{ E' } Z(u) \\
p_u \cdot st_n(z,\vec{x},t) & \text{- SE } 1 \le j_n(z,\vec{x},t) \le |P'_z| \text{ E L'ISTRUZIONE } j(z,\vec{x},t)\text{-ESIMA DI } P'_z \text{ E' } S(u) \\
qt\left(p_u^{(st_m(z,\vec{x},t))_u},\ st_m(z,\vec{x},t)\right) \cdot p_u^{(st_n(z,\vec{x},t))_v} & \text{- SE } 1 \le j_n(z,\vec{x},t) \le |P'_z| \text{ E L'ISTRUZIONE } j(z,\vec{x},t)\text{-ESIMA DI } P'_z \text{ E' } T(u,v) \\
st_n(z,\vec{x},t) & \text{- SE } 1 \le j_n(z,\vec{x},t) \le |P'_z| \text{ E L'ISTRUZIONE } j(z,\vec{x},t)\text{-ESIMA DI } P'_z \text{ E' } J(u,v,q) \text{ OPPURE } j_n(z,\vec{x},t)=0
\end{cases}
$$

POICHÉ VALE

$$\psi_{U}^{(m)}(z,\vec{x}) = \left(st_n\left(z,\vec{x},\mu t\left(j_n(z,\vec{x},t)=0\right)\right)\right)_1$$

$$= \left(\pi_2\left(c_n\left(z,\vec{x},\mu t\left(\pi_1\left(c_n(z,\vec{x},t)\right)=0\right)\right)\right)\right)_1$$

SEGUE LA CALCOLABILITÀ DI $\psi_{U}^{(m)}(z,\vec{x})$ $\blacksquare$

LEMMA PER OGNI $n \geq 1$, I SEGUENTI PREDICATI SONO DECIDIBILI (ANZI, PRIMITIVI RICORSIVI):

(a) $S_n(e, \vec{x}, y, t) \equiv$ " $P_e(\vec{x}) \downarrow y$ IN AL PIÙ t PASSI "

(b) $H_n(e, \vec{x}, t) \equiv$ " $P_e(\vec{x}) \downarrow$ IN AL PIÙ t PASSI "

DIM. SI HA:

- $S_n(e, \vec{x}, y, t) =$ " $j_n(e, \vec{x}, t) = 0$ <u>AND</u> $(st_n(e, \vec{x}, t))_1 = y$ "
- $H_n(e, \vec{x}, t) =$ " $j_n(e, \vec{x}, t) = 0$ " ∎

COROLLARIO (TEOREMA DELLA FORMA NORMALE DI KLEENE)

ESISTONO UNA FUNZIONE CALCOLABILE $U(x)$ E PER OGNI $n \geq 1$ UN PREDICATO DECIDIBILE $T_n(e, \vec{x}, z)$ TALI CHE:

(a) $\phi_e^{(n)}(\vec{x})\downarrow$ SE E SOLO SE $\exists z\, T_n(e, \vec{x}, z)$

(b) $\phi_e^{(n)}(\vec{x}) = U(\mu z\, T_n(e, \vec{x}, z))$

DIM

SI CONSIDERI LA FUNZIONE

$$T_n(e, \vec{x}, z) =_{def} S_n(e, \vec{x}, (z)_1, (z)_2)$$

SI HA $\phi_e^{(n)}(\vec{x})\downarrow \iff \exists u\, \exists v\; S_n(e, \vec{x}, u, v)$

$$\iff \exists z\; S_n(e, \vec{x}, (z)_1, (z)_2)$$

$$\iff \exists z\; T_n(e, \vec{x}, z)$$, DA CUI LA (a)

INOLTRE

$$\phi_e^{(n)}(\vec{x}) = \left(\mu z\, S_n(e,\vec{x},(z)_1,(z)_2)\right)_1 = \left(\mu z\, T_n(e,\vec{x},z)\right)_1 .$$

PERTANTO, PONENDO $U(x) =_{def} (x)_1$, SI HA LA (b). ∎

<u>OSSERVAZIONE</u>

POICHÉ $S_n(e,\vec{x},y,t)$ E' PRIMITIVA RICORSIVA, SEGUE CHE ANCHE LA FUNZIONE $T_n(e,\vec{x},z)$ E' PRIMITIVA RICORSIVA. PERTANTO IL TEOREMA DELLA FORMA NORMALE DI KLEENE CONSENTE DI STABILIRE CHE

"CIASCUNA FUNZIONE CALCOLABILE PUÒ ESSERE OTTENUTA DA FUNZIONI PRIMITIVE RICORSIVE MEDIANTE AL PIÙ UNA SOLA APPLICAZIONE DELL'OPERATORE DI MINIMALIZZAZIONE μ."

ESERCIZIO

(i) SI DIMOSTRI CHE ESISTE UN PREDICATO DECIDIBILE $Q(x, y, z)$ TALE CHE

(a) $y \in E_x \iff \exists z\, Q(x,y,z)$

(b) SE $y \in E_x$ E $Q(x,y,z)$, ALLORA $\phi_x((z)_1) = y$

(ii) DA CIÒ SI DEDUCA L'ESISTENZA DI UNA FUNZIONE CALCOLABILE $g(x,y)$ TALE CHE

(a) $g(x,y)\downarrow \iff y \in E_x$

(b) SE $y \in E_x$ ALLORA $g(x,y) \in W_x$ E $\phi_x(g(x,y)) = y$
(CIOE' $g(x,y) \in \phi_x^{-1}(\{y\})$)

(iii) SI DEDUCA CHE SE f E' UNA FUNZIONE CALCOLABILE E INIETTIVA, ALLORA f^{-1} E' CALCOLABILE

TEOREMA

IL PROBLEMA "ϕ_x E' TOTALE" E' INDECIDIBILE

DIM.

- SIA $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{SE } \phi_x \text{ E' TOTALE} \\ 0 & \text{SE } \phi_x \text{ NON E' TOTALE} \end{cases}$
- OCCORRE DIMOSTRARE CHE g NON E' CALCOLABILE
- PONIAMO

$$f(x) = \begin{cases} \phi_x(x)+1 & \text{SE } \phi_x \text{ E' TOTALE} \\ 0 & \text{SE } \phi_x \text{ NON E' TOTALE} \end{cases}$$

- SI OSSERVI CHE LA FUNZIONE f E' TOTALE, MA NON E' CALCOLABILE, IN QUANTO DIVERSA DA CIASCUNA ϕ_x
- POICHE'

$$f(x) = \begin{cases} \psi_U(x,x)+1 & \text{SE } g(x)=1 \\ 0 & \text{SE } g(x)=0 \end{cases}$$

SE g FOSSE CALCOLABILE ANCHE f LO SAREBBE, DA CUI LA TESI ∎

TEOREMA

ESISTE UNA FUNZIONE TOTALE CALCOLABILE CHE NON E' PRIMITIVA RICORSIVA

DIM.

- SI PUO' VERIFICARE CHE C'E' UN MODO SISTEMATICO PER GENERARE TUTTE LE FUNZIONI PRIMITIVE RICORSIVE NONCHE' I CODICI DEI CORRISPONDENTI PROGRAMMI URM.
- ES. $Sub(f; g_1, g_2, \dots, g_m)$ DENOTA LA FUNZIONE

$$\lambda\vec{x}.\, f(g_1(\vec{x}), g_2(\vec{x}), \dots, g_m(\vec{x}))$$

(PURCHE' f SIA m-ARIA E LE FUNZIONI $g_1, g_2, \dots, g_m$ SIANO n-ARIE, PER QUALCHE n)

- ANALOGAMENTE, $Rec(f, g)$ DENOTA LA FUNZIONE OTTENUTA PER RICORSIONE DA f E g, PURCHE' f SIA n-ARIA E g SIA $(n+2)$-ARIA, PER QUALCHE n.

CIOE', SE
$$\begin{cases} h(\vec{x}, 0) = f(\vec{x}) \\ h(\vec{x}, y+1) = g(\vec{x}, y, h(\vec{x}, y)), \end{cases}$$

ALLORA $Rec(f, g) = \lambda \vec{x}, y.\ h(\vec{x}, y)$

ESEMPIO: PIANO DI DEFINIZIONE DELLA FUNZIONE $\lambda x. x^2$

1. $g_1 = Sub(S; U_3^3)$ $\quad g_1(x,y,z) = U_3^3(x,y,z)+1 = z+1$

2. $g_2 = Rec(U_1^1, g_1)$ $\quad \begin{cases} g_2(x,0) = U_1^1(x) = x \\ g_2(x,y+1) = g_1(x,y,g_2(x,y)) = g_2(x,y)+1 \end{cases}$

PERTANTO $g_2(x,y) = x+y$

3. $g_3 = Sub(g_2; U_1^3, U_3^3)$ $\quad g_3(x,y,z) = g_2(x,z) = x+z$

4. $g_4 = Rec(\underline{0}, g_3)$ $\quad \begin{cases} g_4(x,0) = 0 \\ g_4(x,y+1) = g_3(x,y,g_4(x,y)) = x + g_4(x,y) \end{cases}$

PERTANTO $g_4(x,y) = xy$

5. $f = Sub(g_4; U_1^1, U_1^1)$ $\quad f(x) = g_4(x,x) = x^2$

(DOVE S E' LA FUNZIONE "SUCCESSORE" $\lambda x. x+1$)

- SIANO PERTANTO
  - $\vartheta_0, \vartheta_1, \vartheta_2, \dots$ UN'ENUMERAZIONE DELLE FUNZIONI PRIMITIVE RICORSIVE UNARIE
  - $p(n)$ UNA FUNZIONE TOTALE CALCOLABILE TALE CHE $\vartheta_n = \phi_{p(n)}$
- SI DEFINISCA LA FUNZIONE

$$f(x) =_{\text{def}} \vartheta_x(x) + 1 = \phi_{p(x)}(x) + 1 = \psi_U(p(x), x) + 1$$

- CHIARAMENTE
  - LA FUNZIONE f E' TOTALE E CALCOLABILE
  - $f \neq \vartheta_n$, PER OGNI $n \geq 0$, CIOE' f NON E' PRIMITIVA RICORSIVA ■

ALCUNE OPERAZIONI EFFETTIVE SU FUNZIONI CALCOLABILI

E' POSSIBILE MANIPOLARE IN MANIERA EFFETTIVA FUNZIONI O INSIEMI INFINITI ?

IN ALCUNI CASI LA RISPOSTA E' AFFERMATIVA

ESEMPIO 1

DATE ϕ_x E ϕ_y, CALCOLARE UN INDICE DI $\phi_x \phi_y$

DIM. SIA $f(x,y,z) =_{df} \phi_x(z) \cdot \phi_y(z)$

POICHE' $f(x,y,z) = \psi_U(x,z) \cdot \psi_U(y,z)$, SI HA CHE LA FUNZIONE $f(x,y,z)$ E' CALCOLABILE.

QUINDI PER IL TEOREMA S-m-n ESISTE UNA FUNZIONE TOTALE CALCOLABILE $s(x,y)$ TALE CHE

$$f(x,y,z) = \phi_{s(x,y)}(z).$$

PERTANTO, $\phi_x \cdot \phi_y = \phi_{s(x,y)}$, CIOE' UN INDICE DI $\phi_x \cdot \phi_y$ PUO' ESSERE CALCOLATO IN MANIERA EFFETTIVA DA x E y. ∎

ESEMPIO 2

ESISTE UNA FUNZIONE TOTALE CALCOLABILE $g(x)$ TALE CHE

$$(\phi_x)^2 = \phi_{g(x)} .$$

<u>DIM.</u> SIA $S(x,y)$ LA FUNZIONE TROVATA NELL'ESEMPIO 1. SI PONGA $g(x) =_{def} S(x,x)$.

OVVIAMENTE, $g(x)$ E' TOTALE E CALCOLABILE E INOLTRE

$$\phi_{g(x)} = \phi_x \cdot \phi_x = (\phi_x)^2 . \quad \blacksquare$$

ESEMPIO 3

ESISTE UNA FUNZIONE TOTALE CALCOLABILE $s(x,y)$ TALE CHE

$$W_{s(x,y)} = W_x \cup W_y \,.$$

DIM.

SIA $f(x,y,z) =_{df} \begin{cases} 1 & \text{SE } z \in W_x \text{ O } z \in W_y \\ \uparrow & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$

FISSATI x, y, SI PONGA $g_{x,y}(z) = f(x,y,z)$.

SI HA: $Dom(g_{x,y}) = W_x \cup W_y$.

POICHE' $f(x,y,z) = \underline{1}(\mu t(H_1(x,z,t) \text{ OR } H_1(y,z,t)))$

LA FUNZIONE $f(x,y,z)$ E' CALCOLABILE.

QUINDI ESISTE $s(x,y)$ TOTALE E CALCOLABILE TALE CHE

$f(x,y,z) = \phi_{s(x,y)}(z)$. PERTANTO $W_{s(x,y)} = W_x \cup W_y$. ∎

ESEMPIO 4

ESISTE UNA FUNZIONE TOTALE CALCOLABILE $k(x)$ TALE CHE SE ϕ_x E' INIETTIVA ALLORA $(\phi_x)^{-1} = \phi_{k(x)}$.

DIM.

SIA $g(x,y)$ UNA FUNZIONE CALCOLABILE TALE CHE

(a) $g(x,y)\downarrow \iff y \in E_x$

(b) SE $y \in E_x$ ALLORA $g(x,y) \in W_x$ E $\phi_x(g(x,y)) = y$

(SI VEDA ESERCIZIO PRECEDENTE)

PER IL TEOREMA S-m-n ESISTE UNA FUNZIONE TOTALE CALCOLABILE $k(x)$ TALE CHE $g(x,y) = \phi_{k(x)}(y)$.

SI HA: $W_{k(x)} = E_x$, PER OGNI $x \in \mathbb{N}$.

INFATTI:

$$y \in W_{k(x)} \longleftrightarrow \phi_{k(x)}(y)\downarrow \longleftrightarrow g(x,y)\downarrow \longleftrightarrow y \in E_x$$

- SUPPONIAMO ADESSO CHE ϕ_x SIA INIETTIVA, PER QUALCHE $x \in \mathbb{N}$.
SI HA: $\mathrm{Dom}(\phi_x^{-1}) = \mathrm{Ran}(\phi_x) = E_x$.

- PERTANTO, PER VERIFICARE CHE $\phi_{k(x)} = \phi_x^{-1}$, E' SUFFICIENTE PROVARE CHE $\phi_{k(x)}(y) = \phi_x^{-1}(y)$, PER OGNI $y \in E_x$.

SIA QUINDI $y \in E_x$.
LA (b) IMPLICA: $g(x,y)\downarrow$ E $\phi_x(g(x,y)) = y$, CIOE'
$\phi_x(\phi_{k(x)}(y)) = y$.
PERTANTO:

$$\phi_{k(x)}(y) = \phi_x^{-1}(\phi_x(\phi_{k(x)}(y))) = \phi_x^{-1}(y). \quad \blacksquare$$

ESERCIZI

1) DIMOSTRARE CHE ESISTE UNA FUNZIONE TOTALE CALCOLABILE $k(x)$ TALE CHE SE ϕ_x E' LA FUNZIONE CARATTERISTICA DI UN PREDICATO DECIDIBILE $M(y)$, ALLORA $\phi_{k(x)}$ E' LA FUNZIONE CARATTERISTICA DI not $M(y)$.

2) DIMOSTRARE CHE ESISTE UNA FUNZIONE TOTALE CALCOLABILE $k(x)$ TALE CHE PER OGNI x SI ABBIA $E_{k(x)} = W_x$.

3) DIMOSTRARE CHE ESISTE UNA FUNZIONE TOTALE CALCOLABILE $s(x,y)$ TALE CHE PER OGNI x, y SI ABBIA $E_{s(x,y)} = E_x \cup E_y$.

4) SIA $f(x)$ UNA FUNZIONE CALCOLABILE.
DIMOSTRARE CHE ESISTE UNA FUNZIONE TOTALE CALCOLABILE $k(x)$ TALE CHE PER OGNI x SI ABBIA $W_{k(x)} = f^{-1}(W_x)$.