DECIDIBILITÀ DI PREDICATI (O DI PROBLEMI)

- UN PREDICATO n-ARIO È UNA FUNZIONE

$$M : \mathbb{N}^n \to \{\underline{true}, \underline{false}\}$$

- CONSIDEREREMO SOLO PREDICATI TOTALI
- AD OGNI PREDICATO M VIENE ASSOCIATA LA SUA FUNZIONE CARATTERISTICA

$$c_M(\vec{x}) = \begin{cases} 1 & \text{SE } M(\vec{x}) = \underline{true} \\ 0 & \text{SE } M(\vec{x}) = \underline{false} \end{cases}$$

(PRATICAMENTE, NEL PASSAGGIO DA M A C_M ABBIAMO OPERATO LA SEGUENTE IDENTIFICAZIONE:

$$\underline{true} \longleftrightarrow 1$$

$$\underline{false} \longleftrightarrow 0 \ )$$

DEFINIZIONE

IL PREDICATO $M : \mathbb{N}^n \rightarrow \{\underline{true}, \underline{false}\}$ E' DECIDIBILE
SE LA SUA FUNZIONE CARATTERISTICA c_M E' CALCOLABILE.

ESEMPIO

SI CONSIDERI IL PREDICATO "$x=0$".
LA SUA FUNZIONE CARATTERISTICA E'

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{SE } x=0 \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

IL PROGRAMMA

```
J(1,2,3)
J(1,1,4)
S(2)
T(2,1)
```

CALCOLA $g(x)$ E PERTANTO IL PREDICATO "$x=0$" E' DECIDIBILE

ESERCIZIO

1. DIMOSTRARE CHE I SEGUENTI PREDICATI SONO DECIDIBILI

(a) '$x < y$'

(b) '$x \neq 3$'

(c) 'x E' PARI'

CALCOLABILITÀ SU ALTRI DOMINI

- È POSSIBILE GENERALIZZARE I CONCETTI DI DECIDIBILITÀ E CALCOLABILITÀ A FUNZIONI $f : D \to D$ PER DOMINI $D \neq \mathbb{N}$?

- TALE DOMANDA È INTERESSANTE SOLO SE
  - D È INFINITO
  - D È NUMERABILE

- LA RISPOSTA È AFFERMATIVA, PURCHÉ ESISTA UN MODO EFFETTIVO PER MAPPARE IL DOMINIO D SU $\mathbb{N}$

- IN ALTRE PAROLE SI RICHIEDE UNA CODIFICA EFFETTIVA DI D: $\alpha : D \to \mathbb{N}$ CHE SIA
  - INIETTIVA
  - (SURIETTIVA)
  - "EFFETTIVAMENTE" CALCOLABILE
  - "EFFETTIVAMENTE" INVERTIBILE

DEFINIZIONE SIA D UN DOMINIO NUMERABILE E SIA $\alpha : D \to \mathbb{N}$ UNA CODIFICA EFFETTIVA DI D.
SIA $f : D \to D$ UNA FUNZIONE PARZIALE.
DIREMO CHE f E' CALCOLABILE SE E SOLO SE LA FUNZIONE $f^* : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ DEFINITA DA
$f^* = \alpha \circ f \circ \alpha^{-1}$ E' CALCOLABILE.

ESEMPIO

SI CONSIDERI LA FUNZIONE $f(x) = x - 1$ SU $\mathbb{Z}$.

UNA POSSIBILE CODIFICA EFFETTIVA DI $\mathbb{Z}$ È:

$$\alpha(x) = \begin{cases} 2x & \text{SE } x \geq 0 \\ -2x-1 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

SI HA:

$$\alpha^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} y & \text{SE } y \text{ È PARI} \\ -\frac{1}{2}(y+1) & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

PERTANTO LA FUNZIONE $f^*: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ È DATA DA

$$f^*(x) = \begin{cases} 1 & \text{SE } x = 0 \\ x-2 & \text{SE } x > 0 \text{ E } x \text{ È PARI} \\ x+2 & \text{SE } x \text{ È DISPARI} \end{cases}$$

SI DIMOSTRA CHE f^* È CALCOLABILE

ESERCIZI

1. SI DIMOSTRI CHE LA FUNZIONE $f(x) = 2x$ (DEFINITA SU $\mathbb{Z}$) E' CALCOLABILE

2. SI DIMOSTRI CHE IL PREDICATO '$x \geq 0$' E' DECIDIBILE IN $\mathbb{Z}$

GENERAZIONE DI FUNZIONI CALCOLABILI

LEMMA (FUNZIONI DI BASE)

LE SEGUENTI FUNZIONI SONO CALCOLABILI:

1) FUNZIONE IDENTICAMENTE NULLA $\underline{0}(x) = 0$ $[\lambda x . 0]$
2) FUNZIONE SUCCESSORE $\lambda x . x+1$
3) PROIEZIONI $U_i^n(x_1, \dots, x_n) = x_i$ $[\lambda x_1 \dots x_n . x_i]$

DIM.

1) $Z(1)$ CALCOLA $\underline{0}$
2) $S(1)$ CALCOLA $x+1$
3) $T(i,1)$ CALCOLA U_i^n

FAREMO VEDERE CHE L'INSIEME DELLE FUNZIONI CALCOLABILI E' CHIUSO RISPETTO A

- COMPOSIZIONE
- RICORSIONE
- MINIMALIZZAZIONE

A QUESTO FINE CI SERVIRA' COMPORRE IN MODI DIVERSI DEI PROGRAMMI

CONCATENAZIONE DI PROGRAMMI

- SIANO P E Q DUE PROGRAMMI (CON P DI LUNGH. s)
- PER CONCATENARE P E Q IN MODO TALE CHE Q VENGA ESEGUITO CORRETTAMENTE NON APPENA P TERMINA OCCORRE CHE:

  - P TERMINI SEMPRE CON IL CONTATORE DI PROGRAMMA UGUALE AD $s+1$
  - LE ETICHETTE DELLE ISTRUZIONI DI JUMP DI Q SIANO OPPORTUNAMENTE MODIFICATE, PER TENERE CONTO DEL FATTO CHE L'i-ESIMA ISTRUZIONE DI Q CORRISPONDE ALLA $(s+i)$-ESIMA ISTRUZIONE

DEFINIZIONE

UN PROGRAMMA P DI LUNGHEZZA s E' IN FORMA STANDARD SE PER OGNI ISTRUZIONE $J(m,n,q)$ IN P VALE $q \leq s+1$.

LEMMA SIA P UN PROGRAMMA DI LUNGHEZZA s IN FORMA STANDARD. QUANDO P SI FERMA IL CONTATORE DI PROGRAMMA VALE $s+1$.

- E' POSSIBILE TRASFORMARE UN QUALUNQUE PROGRAMMA P IN UNO IN FORMA STANDARD P^* IN MODO TALE CHE IL SIGNIFICATO DI P SIA PRESERVATO ?

SOLUZIONE DEL I PROBLEMA

LEMMA

PER OGNI PROGRAMMA P ESISTE UN PROGRAMMA P^* IN FORMA STANDARD TALE CHE OGNI COMPUTAZIONE DI P^* È IDENTICA ALLA CORRISPONDENTE COMPUTAZIONE DI P, CON LA SOLA ECCEZIONE DEL VALORE DEL CONTATORE DI PROGRAMMA ALLA FINE DELLA COMPUTAZIONE.

IN PARTICOLARE, PER OGNI $a_1, a_2, \ldots, a_n, b \in \mathbb{N}$ SI HA:

$P(a_1, \ldots, a_n) \downarrow b$ SE E SOLO SE $P^*(a_1, \ldots, a_n) \downarrow b$,

E QUINDI $f_P^{(n)} = f_{P^*}^{(n)}$, PER OGNI $n \in \mathbb{N}$.

DIM. SIA $P = I_1, I_2, \ldots, I_s$.

SI PONGA $P^* =_{df} I_1^*, I_2^*, \ldots, I_s^*$ CON

$$I_j^* = \begin{cases} J(m, n, s+1) & \text{SE } I_j = J(m, n, q) \text{ CON } q > s+1 \\ I_j & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

IL LEMMA SI DIMOSTRA PER INDUZIONE. ■

ESEMPIO

$P =$ J(2,3,8), S(1), S(3), J(1,1,1) $\rightarrow$ $P^* =$ J(2,3,5), S(1), S(3), J(1,1,1)

$$\boxed{f_P^{(2)} = f_{P^*}^{(2)} = \lambda xy.\, x+y}$$

SOLUZIONE AL II PROBLEMA

DATO UN PROGRAMMA P, INDICHIAMO CON $(P+l)$ IL PROGRAMMA CHE SI OTTIENE SOSTITUENDO IN P CIASCUNA ISTRUZIONE $J(m,n,q)$ CON $J(m,n,q+l)$, LASCIANDO INVARIATE LE ALTRE ISTRUZIONI.

ESEMPIO

$$P = \begin{array}{l} J(2,3,5) \\ S(1) \\ S(3) \\ J(1,1,1) \end{array} \Rightarrow (P+3) = \begin{array}{l} J(2,3,8) \\ S(1) \\ S(3) \\ J(1,1,4) \end{array}$$

DEFINIZIONE

DATI DUE PROGRAMMI P E Q, CON $s = \text{length}(P)$, LA CONCATENAZIONE DI P E Q, SCRITTA PQ OPPURE $\begin{matrix} P \\ Q \end{matrix}$, E' IL PROGRAMMA LE CUI PRIME s ISTRUZIONI COINCIDONO CON QUELLE DI P E LE CUI SUCCESSIVE ISTRUZIONI COINCIDONO CON QUELLE DI $(Q+s)$.

LEMMA

- $(PQ)R = P(QR)$
- SE P E Q SONO PROGRAMMI IN FORMA STANDARD, ANCHE PQ E' IN FORMA STANDARD.

ESEMPIO SIANO $P = J(2,3,6)$ $P' = J(2,3,5)$

$$P = \begin{array}{l} J(2,3,6) \\ S(1) \\ S(3) \\ J(1,1,1) \end{array} \qquad P' = \begin{array}{l} J(2,3,5) \\ S(1) \\ S(3) \\ J(1,1,1) \end{array}$$

IN FORMA STANDARD

ALLORA:

$$PP = \begin{array}{l} J(2,3,6) \\ S(1) \\ S(3) \\ J(1,1,1) \\ J(2,3,10) \\ S(1) \\ S(3) \\ J(1,1,5) \end{array} \qquad P'P' = \begin{array}{l} J(2,3,5) \\ S(1) \\ S(3) \\ J(1,1,1) \\ J(2,3,9) \\ S(1) \\ S(3) \\ J(1,1,5) \end{array}$$

IN FORMA STANDARD

- LA SEMPLICE CONCATENAZIONE DI DUE PROGRAMMI NON BASTA PER OTTENERE LA COMPOSIZIONE DELLE RISPETTIVE FUNZIONI, IN QUANTO LE AREE DI LAVORO DEI DUE PROGRAMMI POTREBBERO SOVRAPPORSI CON EFFETTI NEGATIVI
- PONIAMO:

- $\rho(Z(n)) =_{def} \rho(S(n)) =_{def} n$
- $\rho(T(m,n)) =_{def} \rho(J(m,n,q)) =_{def} \max(m,n)$
- $\rho(I_1, \ldots, I_s) = \max_{i=1,\ldots,s} \rho(I_i)$

- PERTANTO, SE $v > \rho(P)$, IL REGISTRO R_v NON SARÀ NÉ CONSULTATO, NÉ CAMBIATO DURANTE ALCUNA COMPUTAZIONE DI P

- SE $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n > m$, USEREMO LA SEGUENTE NOTAZIONE

$$R_\ell \leftarrow f_P(R_{\ell_1}, \dots, R_{\ell_n})$$

PER INDICARE IL SEGUENTE PROGRAMMA:

$T(\ell_1, 1)$
$\vdots$
$T(\ell_n, n)$
] COPIA $R_{\ell_1}, \dots, R_{\ell_n}$ IN $R_1, \dots, R_n$

$Z(m+1)$
$\vdots$
$Z(\rho(P))$
] AZZERA L'AREA DI LAVORO DI P

P] COPIA DI $(P + \max(m, \rho(P)))$

$T(1, \ell)$] COPIA L'OUTPUT IN R_ℓ

COMPOSIZIONE DI FUNZIONI

- VERIFICHIAMO CHE L'INSIEME DELLE FUNZIONI URM-CALCOLABILI E' CHIUSO RISPETTO ALLA COMPOSIZIONE DI FUNZIONI

TEOREMA

SIANO $f(y_1, \dots, y_k)$, $g_1(\vec{x})$, ..., $g_k(\vec{x})$ FUNZIONI CALCOLABILI CON $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$.

ALLORA LA FUNZIONE

$$h(\vec{x}) =_{def} f(g_1(\vec{x}), \dots, g_k(\vec{x}))$$

E' CALCOLABILE.

[SI OSSERVI CHE $h(\vec{x})\downarrow$ SE E SOLO SE

1. $g_1(\vec{x})\downarrow, \dots g_k(\vec{x})\downarrow$
2. $f(g_1(\vec{x}), \dots, g_k(\vec{x}))\downarrow$]

DIM.

SIANO $F, G_1, \ldots, G_k$ PROGRAMMI IN FORMA STANDARD CHE CALCOLANO $f, g_1, \ldots, g_k$, RISPETTIVAMENTE.

SIA $m = \max(\rho(F), \rho(G_1), \ldots \rho(G_k), k, n)$

ALLORA IL PROGRAMMA

$T(1, m+1)$
$\vdots$
$T(n, m+n)$] RICOPIA L'INPUT IN UN'AREA SICURA

$R_{m+n+1} \leftarrow f_{G_1}(R_{m+1}, \ldots, R_{m+n})$
$\vdots$
$R_{m+n+k} \leftarrow f_{G_k}(R_{m+1}, \ldots, R_{m+n})$
$R_1 \leftarrow f_F(R_{m+n+1}, \ldots R_{m+n+k})$

CALCOLA LA FUNZIONE h. ■

LE SEGUENTI SOSTITUZIONI DI VARIABILI

$h_1(x_1, x_2) =_{df} f(x_2, x_1)$ (PERMUTAZIONE)

$h_2(x) =_{df} f(x, x)$ (IDENTIFICAZIONE)

$h_3(x_1, x_2, x_3) =_{df} f(x_2, x_3)$ (INTRODUZIONE DI VARIABILI "DUMMY")

IN UNA FUNZIONE CALCOLABILE GENERANO FUNZIONI CALCOLABILI, IN VIRTU' DEL SEGUENTE COROLLARIO.

COROLLARIO

SIA $f(y_1, \ldots, y_k)$ UNA FUNZIONE CALCOLABILE

SIA $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$ UNA SEQUENZA DI VARIABILI, CON $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$ (CON POSSIBILI RIPETIZIONI)

SIA $h(x_1, \ldots, x_n) =_{df} f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$

ALLORA h È CALCOLABILE.

DIM.

È SUFFICIENTE OSSERVARE CHE

$$h(\vec{x}) = f(U^n_{i_1}(\vec{x}), \ldots, U^n_{i_k}(\vec{x}))$$

CON $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. ∎

ESEMPIO

LA FUNZIONE $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3$ E' CALCOLABILE

INFATTI, SIA $g(x, y) = x + y$.

SI HA:

$$f(x_1, x_2, x_3) = g(g(x_1, x_2), x_3)$$
$$= g(g(U_1^3(\vec{x}), U_2^3(\vec{x})), U_3^3(\vec{x}))$$

PERTANTO f E' CALCOLABILE, IN QUANTO g E' CALCOLABILE. ∎

ESERCIZI

1. SI DIMOSTRI CHE PER OGNI $m \in \mathbb{N}$ LE SEGUENTI FUNZIONI SONO CALCOLABILI

   (a) $\underline{m}$ (DOVE $\underline{m}(x) = m \quad \forall x \in \mathbb{N}$)

   (b) mx

2. SIA $f(x,y)$ CALCOLABILE ED $m \in \mathbb{N}$.

   SIA $h(x) =_{def} f(x,m)$

   SI DIMOSTRI CHE $h(x)$ E' CALCOLABILE

3. SIA $g(x)$ UNA FUNZIONE TOTALE E CALCOLABILE, SI DIMOSTRI CHE IL SEGUENTE PREDICATO

   $$M(x,y) =_{def} \text{"} g(x) = y \text{"}$$

   E' DECIDIBILE