FUNZIONI

"BUSY BEAVER"

(o del "CASTORO INDAFFARATO")

SIA $\mathcal{P}_r$ L'INSIEME DEI PROGRAMMI URM P TALI CHE:

- $\text{length}(P) \leq r$
- $\rho(P) \leq r$
- $\lambda(P) \leq r$

DOVE $\lambda(P)$ E' LA MASSIMA ETICHETTA q PRESENTE IN UN'ISTRUZIONE DI SALTO $J(m,n,q)$ IN P, CIOE'

$$\begin{cases} \lambda(Z(n)) = \lambda(S(m)) = \lambda(T(m,n)) = 0 \\ \lambda(J(m,n,q)) = q \\ \lambda(P) = \max\{\lambda(I) : I \text{ ISTRUZIONE IN } P\} \end{cases}$$

LEMMA: $\mathcal{P}_r$ E' FINITO, PER OGNI $r \geq 1$.

DIM.

r ISTRUZIONI DI TIPO $Z(n)$, CON $n \leq r$

r ISTRUZIONI DI TIPO $S(n)$, CON $n \leq r$

r^2 ISTRUZIONI DI TIPO $T(m,n)$, CON $m,n \leq r$

r^3 ISTRUZIONI DI TIPO $J(m,n,q)$, CON $m,n,q \leq r$

PONIAMO $R = r^3 + r^2 + 2r$,

$\mathcal{P}_r$ CONTIENE
R PROGRAMMI DI LUNGHEZZA 1
R^2 PROGRAMMI DI LUNGHEZZA 2
$\vdots$
R^r PROGRAMMI DI LUNGHEZZA r

QUINDI $$|\mathcal{P}_r| = R\,(1 + R + \ldots + R^{r-1}) = \frac{R\,(R^r - 1)}{(R-1)}.$$

$\blacksquare$

FUNZIONI "BUSY BEAVER"

DEF.
$$\begin{cases} \Sigma(0) = 0 \\ \Sigma(n) = \max \{ f_P^{(1)}(0) : P \in \mathcal{P}_n \wedge P(0)\downarrow \} \end{cases}$$

$$\begin{cases} S(0) = 0 \\ S(n) = \max \{ |P(0)| : P \in \mathcal{P}_n \wedge P(0)\downarrow \} \end{cases}$$

(DOVE $|P(\vec{r})|$ È LA LUNGHEZZA DELLA COMPUTAZIONE $P(\vec{r})$, QUANDO $P(\vec{r})\downarrow$)

LEMMA LA FUNZIONE $\Sigma(n)$ È STRETTAMENTE CRESCENTE.

DIM. $\Sigma(0) = 0 < 1 = \Sigma(1)$ (PROGRAMMA $S(1)$)

SIA $\bar{P}_n \in \mathcal{P}_n$ TALE CHE $f^{(1)}_{\bar{P}_n}(0) = \Sigma(n)$

(POSSIAMO SUPPORRE CHE $\bar{P}_n$ SIA IN FORMA STANDARD).

SI CONSIDERI IL PROGRAMMA Q:

$\bar{P}_n$
$S(1)$

CHIARAMENTE $Q \in \mathcal{P}_{n+1}$.

SI HA:

$$\Sigma(n+1) \geq f^{(1)}_{Q}(0) = f^{(1)}_{\bar{P}_n}(0) + 1 > f^{(1)}_{\bar{P}_n}(0) = \Sigma(n). \qquad \blacksquare$$

LEMMA LA FUNZIONE $\Sigma(n)$ NON E' CALCOLABILE.

DIM. - SIA $g \in \mathcal{C}_1$ UNA FUNZIONE CALCOLABILE UNARIA E TOTALE E SIA $P \in \mathcal{P}_r$, PER QUALCHE $r \in \mathbb{N}$, UN PROGRAMMA CHE CALCOLI g (CIOE' TALE CHE $g = f_P^{(1)}$).

- DIMOSTREREMO CHE $\Sigma \neq g$, DA CUI, PER L'ARBITRARIETA' DI g, SEGUIRA' CHE $\Sigma \notin \mathcal{C}_1$.

- MA COME METTERE IN RELAZIONE $g(n)$ CON $\Sigma(n)$?

SIA Q_n IL PROGRAMMA

$$\left.\begin{array}{l} S(1) \\ \vdots \\ S(1) \end{array}\right\} n \text{ VOLTE}$$
$$P$$

SI HA: $Q_n \in \mathcal{P}_{n+r}$. PERTANTO:

$$g(n) = f_P^{(1)}(n) = f_{Q_n}^{(1)}(0) \leq \Sigma(n+r) < \Sigma(n+r+1)$$

SIAMO SOLO RIUSCITI A METTERE IN RELAZIONE

$g(n)$ CON $\Sigma(n+r)$!

SI CONSIDERI IL PROGRAMMA Q'_n

$$\left.\begin{array}{l} S(1) \\ \vdots \\ S(1) \end{array}\right\} \text{ n VOLTE}$$

Carica n in R_1

n+1 : $J(1,2,n+6)$

$S(2)$

$S(3)$

$S(3)$

$J(1,1,n+1)$

$T(3,1)$

$Z(2)$

$Z(3)$

P

Carica $2n$ in R_1 e azzera R_2 e R_3

SI HA:

$$g(2n) = f_P^{(1)}(2n) = f_{Q'_n}^{(1)}(0) \leq \Sigma(n+r+8)$$

E PER $n > r+8$ SI HA:

$$g(2n) = f_P^{(1)}(2n) = f_{Q'_n}^{(1)}(0) \leq \Sigma(n+r+8) < \Sigma(2n).$$

DA CIO' SEGUE CHE $g \neq \Sigma$ E PERTANTO, PER L'ARBITRARIETA' DI g, SEGUE CHE Σ NON E' CALCOLABILE. $\blacksquare$

- FAREMO VEDERE CHE LA FUNZIONE Σ DOMINA L'INSIEME DELLE FUNZIONI CALCOLABILI TOTALI E UNARIE.

DEF. SIANO $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ E $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ TOTALI E SIA $\mathcal{F}$ UN INSIEME DI FUNZIONI DA $\mathbb{N}$ IN $\mathbb{N}$.

f DOMINA g SE PER QUALCHE $n_0 \in \mathbb{N}$

$$n \geq n_0 \longrightarrow f(n) \geq g(n).$$

f DOMINA STRETTAMENTE g SE PER QUALCHE $n_0 \in \mathbb{N}$

$$n \geq n_0 \longrightarrow f(n) > g(n).$$

f DOMINA $\mathcal{F}$ SE f DOMINA STRETTAMENTE OGNI FUNZIONE TOTALE IN $\mathcal{F}$.

ESEMPI:

- 2^n DOMINA L'INSIEME DELLE FUNZIONI POLINOMIALI
- $n!$ DOMINA L'INSIEME DELLE FUNZIONI ESPONENZIALI

LEMMA: SE $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ DOMINA $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (INSIEME DELLE FUNZIONI DA $\mathbb{N}$ IN $\mathbb{N}$)

ALLORA $f \notin \mathcal{F}$.

DIM. SE $f \in \mathcal{F}$, ALLORA f DOMINEREBBE STRETTAMENTE SE STESSA, ASSURDO. $\blacksquare$

LEMMA: LA FUNZIONE Σ DOMINA $\mathcal{C}_1$.

DIM. COME NEL LEMMA PRECEDENTE,

SIA $g \in \mathcal{C}_1$ TOTALE E SIA $P \in \mathcal{P}_r$, PER QUALCHE

$r \in \mathbb{N}$, UN PROGRAMMA CHE CALCOLI g.

SI CONSIDERI IL SEGUENTE PROGRAMMA URM $Q''_{n,k}$

$$Q''_{n,k}: \quad \left.\begin{array}{l} S(1) \\ \vdots \\ S(1) \end{array}\right\} n \text{ VOLTE}$$

carica n in R_1

$$\begin{array}{ll} n+1: & J(1,2,n+6) \\ & S(2) \\ & S(3) \\ & S(3) \\ & J(1,1,n+1) \\ & T(3,1) \\ & \left.\begin{array}{l} S(1) \\ \vdots \\ S(1) \end{array}\right\} k \geq 0 \text{ VOLTE} \\ & Z(2) \\ & Z(3) \\ & P \end{array}$$

Carica $2n+k$ in R_1 e azzera R_2 e R_3

SI OSSERVI CHE $f^{(1)}_{Q''_{n,k}}(0) = f^{(1)}_{P}(2n+k)$

PERTANTO:

$$g(2n+k) = f_P^{(1)}(2n+k) = f_{Q''_{n,k}}^{(1)}(0) \leq$$

$$\leq \Sigma(n+k+r+8) < \Sigma(2n+k)$$

PER OGNI $n > r+8$.

MA ALLORA, PER OGNI $m \geq 2r+18$, POSTO

$$\begin{cases} k = m - 2r - 18 \geq 0 \\ n = r+9 \end{cases}$$

$$2n + k = 2(r+9) + m - 2r - 18 = m$$

E QUINDI

$$g(m) < \Sigma(m) \quad (\text{PER OGNI } m \geq 2r+18). \qquad \blacksquare$$

IN MANIERA ANALOGA A QUANTO VISTO PER LA FUNZIONE $\Sigma(n)$

SI POTREBBE DIMOSTRARE CHE ANCHE LA FUNZIONE $S(n)$,

DEFINITA DA

$$\begin{cases} S(0) = 0 \\ S(n) = \max\{|P(0)| : P \in \mathcal{P}_n \wedge P(0)\downarrow\} \end{cases},$$

NON E' CALCOLABILE

UNA DIMOSTRAZIONE ALTERNATIVA, BASATA SULLA TECNICA DELLA RIDUZIONE, VIENE ILLUSTRATA IN MODO INFORMALE NEI LUCIDI SEGUENTI.

LEMMA LA FUNZIONE $S(n)$ NON E' CALCOLABILE.

DIM. (INFORMALE)

E' SUFFICIENTE FARE VEDERE CHE SE $S(n)$ FOSSE CALCOLABILE, ALLORA LO SAREBBE ANCHE LA FUNZIONE $\Sigma(n)$.

- SUPPONIAMO QUINDI PER ASSURDO CHE $S(n)$ SIA CALCOLABILE.

PER CALCOLARE $\Sigma(n)$ POSSIAMO ALLORA USARE L'ALGORITMO NEL LUCIDO SEGUENTE.

DATO $n \in \mathbb{N}$

- SI CALCOLI $\mathcal{P}_n$
- SI INIZIALIZZI $M := 0$
- PER OGNI $P \in \mathcal{P}_n$ SI DETERMINI SE AL PIÙ DOPO $S(n)$ PASSI LA COMPUTAZIONE $P(0)$ SIA TERMINATA.

  IN CASO POSITIVO, SI PONGA

  $$M := \max(M, f_P^{(1)}(0))$$

  (ALTRIMENTI SIAMO CERTI CHE $P(0)\uparrow$ E QUINDI POSSIAMO PASSARE ALL' ITERAZIONE SUCCESSIVA)

- SI RESTITUISCA IL VALORE FINALE M (CHE E' UGUALE A $\Sigma(n)$)

$\blacksquare$