

LA NOTAZIONE "↑" DI KNUTH

$$a \times b = \underbrace{a + a + \dots + a}_{b \text{ copies of } a}$$

Es. $4 \times 3 = \underbrace{4 + 4 + 4}_{3 \text{ copies of } 4} = 12$

$$a \uparrow b = a^b = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{b \text{ copies of } a}$$

Es. $4 \uparrow 3 = 4^3 = \underbrace{4 \times 4 \times 4}_{3 \text{ copies of } 4} = 64$

$$a \uparrow\uparrow b = {}^b a = \underbrace{a^{a^{\dots^a}}}_{b \text{ copies of } a} = \underbrace{a \uparrow (a \uparrow (\dots \uparrow a))}_{b \text{ copies of } a}$$

(ASSOCIATIVITA' A DESTRA)

ESEMPI

$$4 \uparrow\uparrow 3 = {}^3 4 = \underbrace{4^{4^4}}_{3 \text{ copies of } 4} = \underbrace{4 \uparrow (4 \uparrow 4)}_{3 \text{ copies of } 4} = 4^{256} \approx 1.3 \times 10^{154}$$

$$3 \uparrow\uparrow 2 = 3^3 = 27$$

$$3 \uparrow\uparrow 3 = 3^{3^3} = 3^{27} = 7,625,597,484,987$$

$$3 \uparrow\uparrow 4 = 3^{3^{3^3}} = 3^{7625597484987}$$

$$3 \uparrow\uparrow 5 = 3^{3^{3^{3^3}}} = 3^{3^{7625597484987}}$$

$$a \uparrow\uparrow\uparrow b = \underbrace{a \uparrow\uparrow (a \uparrow\uparrow (\dots \uparrow\uparrow a))}_{b \text{ copies of } a}$$

(ASSOCIATIVITA' A DESTRA)

$$3 \uparrow\uparrow\uparrow 2 = 3 \uparrow\uparrow 3 = 3^{3^3} = 3^{27} = 7,625,597,484,987$$

$$3 \uparrow\uparrow\uparrow 3 = 3 \uparrow\uparrow 3 \uparrow\uparrow 3 = 3 \uparrow\uparrow (3 \uparrow 3 \uparrow 3) = \underbrace{3 \uparrow 3 \uparrow \dots \uparrow 3}_{3 \uparrow 3 \uparrow 3 \text{ copies of } 3} = \underbrace{3 \uparrow 3 \uparrow \dots \uparrow 3}_{7,625,597,484,987 \text{ copies of } 3}$$

$$a \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow b = \underbrace{a \uparrow\uparrow\uparrow (a \uparrow\uparrow\uparrow (\dots \uparrow\uparrow\uparrow a))}_{b \text{ copies of } a}$$

(ASSOCIATIVITA' A DESTRA)

$$a \underbrace{\uparrow \uparrow \dots \uparrow}_n b = a \underbrace{\uparrow \dots \uparrow}_{n-1} a \underbrace{\uparrow \dots \uparrow}_{n-1} a \dots a \underbrace{\uparrow \dots \uparrow}_{n-1} a$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{b \text{ copies of } a}$

(ASSOCIATIVITA' A DESTRA)

SI PONE

$$\underbrace{\uparrow \uparrow \dots \uparrow}_n \equiv \uparrow^{(n)}$$

(ASSOCIATIVITA' A DESTRA)

QUINDI:

$$a \uparrow^{(n)} b = \underbrace{\left(a \uparrow^{(n-1)} \left(a \uparrow^{(n-1)} \left(a \dots \left(a \uparrow^{(n-1)} a \right) \dots \right) \right) \right)}$$

PONIAMO: $\psi(x, y) = 2^{\uparrow^{(x-1)}y}$

PER $x \geq 2, y \geq 1$

$x \backslash y$	0	1	2	3	4	...
0	?	?	?	?	?	...
1	?	?	?	?	?	...
2	?	x	x	x	x	...
3	?	x	x	x	x	...
4	?	x	x	x	x	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

RIMANE DA

- DEFINIRE $\psi(x, y)$ ANCHE PER $x < 2$ E $y = 0$
- TROVARE UNA RICORRENZA PER $\psi(x, y)$

IMPORREMO $\psi(x, y) \geq 1$

$$\psi(x, y) = 2 \uparrow^{(x-1)} y$$

$$\psi(x+1, y+1) = 2 \uparrow^{(x)} (y+1)$$

$$= \underbrace{2 \uparrow^{(x-1)} 2 \uparrow^{(x-1)} 2 \dots 2 \uparrow^{(x-1)} 2}_{y+1 \text{ COPIE DI } 2} \quad [x \geq 2]$$

$$= 2 \uparrow^{(x-1)} \left(\underbrace{2 \uparrow^{(x-1)} 2 \dots 2 \uparrow^{(x-1)} 2}_{y \text{ COPIE DI } 2} \right) \quad [y \geq 1]$$

$$= 2 \uparrow^{(x-1)} (2 \uparrow^{(x)} y)$$

$$= \psi(x, \psi(x+1, y))$$

RICORRENZA : $\psi(x+1, y+1) = \psi(x, \psi(x+1, y))$, $x \geq 2$, $y \geq 1$

CASO BASE :

$$\begin{cases} \psi(2, y) = 2 \uparrow y = 2^y, & y \geq 1 \\ \psi(x, 1) = 2 \uparrow^{(x-1)} 1 = 2, & x \geq 3 \end{cases}$$

$x \backslash y$	0	1	2	3	4	...
0	?	?	?	?	?	...
1	?	?	?	?	?	...
2	?	x	x	x	x	...
3	?	x	x	x	x	...
4	?	x	x	x	x	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

↑
CASO
BASE

$$\psi(x, y) = 2^{\uparrow^{(x-1)}y}$$

$$\psi(x+1, y+1) = \psi(x, \psi(x+1, y)), \quad x \geq 2, y \geq 1$$

ESTENDENDO LA RICORRENZA ANCHE PER $x=1$ SI DEVE AVERE

$$\psi(2, y+1) = \psi(1, \psi(2, y))$$

MA

$$\psi(2, y+1) = 2^{\uparrow^{(1)}(y+1)} = 2^{y+1}$$

$$\psi(1, \psi(2, y)) = \psi(1, 2^y) \quad \boxed{y \geq 1}$$

QUINDI DOVREBBE VALERE: $\psi(1, 2^y) = 2^{y+1} = 2 \cdot 2^y$

E' ALLORA SUFFICIENTE PORRE

CASO BASE: $\boxed{\psi(1, z) = 2 \cdot z, \quad z \geq 2}$

$x \backslash y$	0	1	2	3	4	...
0	?	?	?	?	?	...
1	?	?	X	X	X	...
2	?	X	X	X	X	...
3	?	X	X	X	X	...
4	?	X	X	X	X	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

↑
CASO
BASE

$$\psi(x, y) = 2^{\uparrow^{(x-1)} y}$$

$$\psi(x+1, y+1) = \psi(x, \psi(x+1, y)), \quad x \geq 1, y \geq 1$$

ESTENDENDO LA RICORRENZA ANCHE PER $x=0$ SI DEVE AVERE

$$\psi(1, y+1) = \psi(0, \psi(1, y))$$

MA

$$\psi(1, y+1) = 2 \cdot (y+1)$$

$$\psi(0, \psi(1, y)) = \psi(0, 2y)$$

QUINDI DOVREBBE VALERE: $\psi(0, 2y) = 2 \cdot (y+1) = 2y + 2$

E' ALLORA SUFFICIENTE PORRE

CASO BASE: $\psi(0, z) = z + 2, \quad z \geq 2$

$x \backslash y$	0	1	2	3	4	...
0	?	?	4	5	6	...
1	?	?	X	X	X	...
2	?	X	X	X	X	...
3	?	X	X	X	X	...
4	?	X	X	X	X	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

↑
CASO
BASE

$$\psi(x, y) = 2 \uparrow^{(x-1)} y$$

$$\psi(x+1, y+1) = \psi(x, \psi(x+1, y)),$$

$$x \geq 0, y \geq 1$$

ESTENDENDO LA RICORRENZA ANCHE PER $y = 0$ SI DEVE AVERE

$$\psi(x+1, 1) = \psi(x, \psi(x+1, 0))$$

MA

$$\psi(x+1, 1) = 2 \uparrow^{(x)} 1 = \underbrace{2 \uparrow^{(x-1)} 2 \dots 2 \uparrow^{(x-1)} 2}_{1 \text{ COPIA}}$$

$$= 2, \quad x \geq 2$$

QUINDI DOVREBBE VALERE:

$$2 = \psi(x, \psi(x+1, 0)) = 2 \uparrow^{(x-1)} \psi(x+1, 0)$$

E' ALLORA SUFFICIENTE PORRE

$$\psi(z, 0) = 1, \quad z \geq 2$$

$x \backslash y$	0	1	2	3	4	...
0	?	?	4	5	6	...
1	?	x	x	x	x	...
2	1	x	x	x	x	...
3	1	x	x	x	x	...
4	1	x	x	x	x	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

INOLTRE, PER $x = 1$ SI AVREBBE

$$\psi(2, 1) = \psi(1, \psi(2, 0))$$

$$2 = \psi(1, \psi(2, 0))$$

$$\psi(2, 0) = 1$$

$$\psi(1, 1) = 2$$

$$\psi(x, y) = 2^{\uparrow^{(x-1)}y}$$

$$\psi(x+1, y+1) = \psi(x, \psi(x+1, y)),$$

$$x \geq 0, y \geq 0 \quad (x+y \geq 1)$$

ESTENDENDO LA RICORRENZA ANCHE
PER $x=0, y=0$

$$\psi(1, 1) = \psi(0, \psi(1, 0))$$

MA $\psi(1, 1) = 2,$

QUINDI $2 = \psi(0, \psi(1, 0))$

DA CUI $\psi(1, 0) \leq 1$, POICHÉ' ABBIAMO IMPOSTO CHE

$\psi(1, 0) \geq 1$, OTTENIAMO $\psi(1, 0) = 1$ E QUINDI $\psi(0, 1) = 2$.

INFINE, PONENDO $\psi(0, 0) = 1$ SI HA CHE

$\psi(x, y)$ È - STRETTAMENTE CRESCENTE IN y

- NON DECRESCENTE IN x

- NON NULLA

$x \backslash y$	0	1	2	3	4	...
0	1	2	4	5	6	...
1	1	X	X	X	X	...
2	1	X	X	X	X	...
3	1	X	X	X	X	...
4	1	X	X	X	X	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

$$\psi(x, y) = 2 \uparrow^{(x-1)} y$$

$$\psi(x+1, y+1) = \psi(x, \psi(x+1, y)),$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

FUNZIONE DI ACKERMANN

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi(x, 0) = 1 \\ \psi(0, y) = \begin{cases} 1 & \text{SE } y = 0 \\ 2 & \text{SE } y = 1 \\ y+2 & \text{SE } y \geq 2 \end{cases} \\ \psi(x+1, y+1) = \psi(x, \psi(x+1, y)) \end{array} \right.$$

$x \backslash y$	0	1	2	3	4	...
0	1	2	4	5	6	...
1	1	X	X	X	X	...
2	1	X	X	X	X	...
3	1	X	X	X	X	...
4	1	X	X	X	X	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

LEMMA A $\psi(x, y) \leq \psi(x+1, y)$, PER OGNI $x, y \geq 0$

LEMMA B $\psi(x, y+k) + y \leq \psi(x, y+k+1)$,
PER OGNI $x \geq 2$ E $k, y \geq 0$

LEMMA C PER OGNI $\bar{x}, \bar{k} \geq 0$ ASSEGNATI, SI HA












$$\psi(\bar{x}, y + \bar{k}) < \psi(\bar{x} + 1, y)$$

PER OGNI y SUFFICIENTEMENTE GRANDE

CALCOLABILITA' DELLA FUNZIONE

$\psi(x,y)$

$$\begin{aligned}\psi(2,2) &= \psi(1, \psi(2,1)) \\ &= \psi(1, \psi(1, \psi(2,0))) \\ &= \psi(1, \psi(1, 1)) \\ &= \psi(1, \psi(0, \psi(1,0))) \\ &= \psi(1, \psi(0, 1)) \\ &= \psi(1, 2) \\ &= \psi(0, \psi(1,1)) \\ &= \psi(0, \psi(0, \psi(1,0))) \\ &= \psi(0, \psi(0, 1)) \\ &= \psi(0, 2) \\ &= 4\end{aligned}$$

	2,1
	2,0
	1,1
	1,0
	0,1
	1,2
	1,1
	1,0
	0,1
	0,2
	4

STACK

ACKERMANN(x,y)

if x=0 OR y=0 then

z := BASE_CASE_ACKERMANN(x,y)

if STACK_EMPTY() then

return (z)

else

w := pop()

ACKERMANN(w,z)

else

PUSH(x-1)

ACKERMANN(x,y-1)

GESTIONE DELLO STACK

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} S = P_1^{a_1} \cdot P_2^{a_2} \cdot \dots \cdot P_n^{a_n} \\ n \end{cases}$$

↑
TOP

QUINDI INIZIALMENTE $\begin{cases} S = 1 \\ n = 0 \end{cases}$ STACK VUOTO

$$\underline{\text{STACK_EMPTY}}() \equiv \overline{\text{sg}}(n)$$

PUSH(x)

$$n := n + 1$$

$$S := S \cdot P_n^x$$

POP()

$$z := (S)_n$$

$$S := S / P_n^z$$

$$n := n - 1$$

return z

- PER INDUZIONE SU (x, y) (NELL'ORDINAMENTO LESSICOGRAFICO)
SI PUO' DIMOSTRARE CHE IL PROGRAMMA ACKERMANN (x, y)
CALCOLA CORRETTAMENTE LA FUNZIONE $\psi(y, y)$

- PERTANTO LA FUNZIONE $\psi(y, y)$ E' CALCOLABILE

- DIAMO ADESSO ALCUNI CENNI PER DIMOSTRARE
CHE LA FUNZIONE $\psi(y, y)$ NON E' PRIMITIVA RICORSIVA

LOOP PROGRAM

ISTRUZIONI: $Z(n)$, $S(n)$, $T(n, m)$

(*) LOOP (n)

P

END

SIA k IL VALORE DEL
REGISTRO R_n AL MOMENTO
DELL'ESECUZIONE DI (*).

SI ESEGUA IL PROGRAMMA
P k VOLTE DI SEGUITO

- I LOOP PROGRAM SONO PARTICOLARI PROGRAMMI URM
- ESSI TERMINANO SEMPRE

GERARCHIA DEI LOOP PROGRAM

L : INSIEME DEI LOOP PROGRAM

L_n : INSIEME DEI LOOP PROGRAM CON PROFONDITA'
DI ANNIDAMENTO DELLE COPPIE LOOP-END
DI AL PIU' n

CHIARAMENTE $L = \bigcup_{n=0}^{\infty} L_n$

\mathcal{L}_n : INSIEME DELLE FUNZIONI CALCOLABILI DA
PROGRAMMI IN L_n

-SI PUO' DIMOSTRARE CHE $\mathcal{L}_n \subsetneq \mathcal{L}_{n+1}$, PER OGNI n .

TEOREMA

$$PR = \bigcup_{m=0}^{\infty} L_m$$

DIM (CENNI)

- LE FUNZIONI INIZIALI APPARTENGONO A L_0
- $\bigcup_{m=0}^{\infty} L_m$ E' CHIUSO RISPETTO A COMPOSIZIONE E A RICORSIONE PRIMITIVA

$$\text{PERTANTO } PR \subseteq \bigcup_{m=0}^{\infty} L_m$$

PER QUANTO RIGUARDA L'INCLUSIONE INVERSA, SI PUO' PROCEDERE PER INDUZIONE SU n

DIMOSTRANDO:

$$L_0 \subseteq PR$$

$$L_n \subseteq PR \rightarrow L_{n+1} \subseteq PR, \text{ PER OGNI } n$$

PERTANTO $\bigcup_{m=0}^{\infty} L_m \subseteq PR$, DA CUI IL TEOREMA

COMPLESSITA'

- SIA $P \in L$. PONIAMO:

$T_p(x_1, \dots, x_m) =$ NUMERO COMPLESSIVO DI ESECUZIONI
DI ISTRUZIONI DI TIPO Z, S, T
NEL CORSO DELLA COMPUTAZIONE
DI $P(x_1, \dots, x_m)$

VALE CHIARAMENTE IL SEGUENTE RISULTATO!

LEMMA $P \in L_n \rightarrow T_p \in L_m$

BOUNDING THEOREM

SIA $P \in L_n$. ALLORA ESISTE k TALE CHE

$$T_P(x_1, \dots, x_m) \leq \psi(n, \max(x_1, \dots, x_m) + k)$$

NOTA: VALE ANCHE IL SEGUENTE INVERSO DEL BOUNDING THEOREM.

TEOREMA SIA P UN LOOP PROGRAM CHE CALCOLA LA FUNZIONE $g(x_1, \dots, x_m)$,
SE $T_P(x_1, \dots, x_m) \leq \psi(n, \max(x_1, \dots, x_m) + k)$,
PER QUALCHE COSTANTE $n \geq 2$ E $k \geq 0$, ALLORA
 $g \in L_m$.

IL BOUNDING THEOREM È IL

LEMMA B $\psi(x, y+k) + y \leq \psi(x, y+k+1)$,

PER OGNI $x \geq 2$ E $k, y \geq 0$

IMPLICANDO LA SEGUENTE LIMITAZIONE SULLE
FUNZIONI CALCOLATE DA PROGRAMMI IN L_n

LEMMA SIA $g(x_1, \dots, x_m) \in \mathcal{L}_n$. ALLORA ESISTE k
TALE CHE

$$g(x_1, \dots, x_m) \leq \psi(n, \max(x_1, \dots, x_m) + k).$$

DIM SIA $P \in \mathcal{L}_n$ UN PROGRAMMA CHE CALCOLA
 $g(x_1, \dots, x_m)$.

PER IL BOUNDING THEOREM,

$$T_P(x_1, \dots, x_m) \leq \psi(n, \max(x_1, \dots, x_m) + h)$$

PER QUALCHE COSTANTE h . MA

$$g(x_1, \dots, x_m) \leq T_P(x_1, \dots, x_m) + \max(x_1, \dots, x_m)$$

$$\leq \psi(n, \max(x_1, \dots, x_m) + h) + \max(x_1, \dots, x_m)$$

$$\leq \psi(n, \max(x_1, \dots, x_m) + h + 1), \text{ DA CUI IL LEMMA.}$$

- DIMOSTRIAMO ADESSO CHE LA FUNZIONE $\psi(x,x)$ NON È
PRIMITIVA RICORSIVA (E QUINDI, A MAGGIOR RAGIONE,
ANCHE LA FUNZIONE $\psi(x,y)$ NON PUÒ ESSERE PRIMITIVA
RICORSIVA)

TEOREMA $\psi(x,x) \notin \mathbb{P}\mathbb{R}$

DIM. SE $\psi(x,x) \in \mathbb{P}\mathbb{R}$, POICHE' $\mathbb{P}\mathbb{R} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}_n$

SI HA $\psi(x,x) \in \mathcal{L}_n$, PER QUALCHE n .

QUINDI IL LEMMA PRECEDENTE IMPLICA CHE PER QUALCHE k

$$\psi(x,x) \leq \psi(n, x+k) \quad (\text{PER OGNI } x).$$

MA PER IL LEMMA C VALE $\psi(n, x+k) < \psi(n+1, x)$,

SIA PURE SODD PER x SUFFICIENTEMENTE GRANDI.

PERTANTO ESISTE $n_0 > n+1$ TALE CHE:

$$\psi(n_0, n_0) \leq \psi(n, n_0+k) < \psi(n+1, n_0) \leq \psi(n_0, n_0).$$

\uparrow LEMMA A

ASSURDO!

PERTANTO $\psi(x,x) \notin \mathbb{P}\mathbb{R}$, COME VOLEVASI DIMOSTRARE.