

INSIEMI RICORSIVI E RICORSIVAMENTE ENUMERABILI

- C'È UNA SEMPLICE CORRISPONDENZA TRA PREDICATI UNARI E SOTTOINSIEMI DI \mathbb{N} :

$M(x) \rightarrow \{x : M(x) \text{ È VERO}\}$ (ESTENSIONE DI M)

$A \subseteq \mathbb{N} \rightarrow "x \in A"$

DEFINIZIONE SIA $A \subseteq \mathbb{N}$, LA FUNZIONE CARATTERISTICA DI A È LA FUNZIONE $c_A : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ COSÌ DEFINITA:

$$c_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{SE } x \in A \\ 0 & \text{SE } x \notin A \end{cases}$$

SE c_A È CALCOLABILE (CIOÈ IL PREDICATO " $x \in A$ " È DECIDIBILE), ALLORA A È DETTO RICORSIVO. ■

NOTA ANALOGHE CONSIDERAZIONI SI POSSONO FARE PER SOTTOINSIEMI DI \mathbb{N}^n , CON $n \geq 2$.

ESEMPI

- \mathbb{N} È RICORSIVO
- $\{2x: x \in \mathbb{N}\}$ È RICORSIVO
- OGNI INSIEME FINITO È RICORSIVO
- L'INSIEME DEI NUMERI PRIMI È RICORSIVO
- $\{x: \phi_x \text{ È TOTALE}\}$ NON È RICORSIVO
- $\{x: x \in W_x\}$ NON È RICORSIVO
- $\{x: \phi_x = \underline{0}\}$ NON È RICORSIVO

TEOREMA SE A E B SONO INSIEMI RICORSIVI, TALI SONO GLI INSIEMI \bar{A} , $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$.

DIM - SIANO M_A E M_B I PREDICATI CORRISPONDENTI AD A E B , RISPETTIVAMENTE.

- POICHE' M_A E M_B SONO DECIDIBILI, TALI SONO ANCHE I PREDICATI

not M_A , M_A and M_B , M_A or M_B , M_A and not M_B .

- ESSI SONO RISPETTIVAMENTE UGUALI AI PREDICATI CORRISPONDENTI AGLI INSIEMI \bar{A} , $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, CHE PERTANTO RISULTANO RICORSIVI, ■

INSIEMI RICORSIVAMENTE ENUMERABILI

DEFINIZIONE SIA $A \subseteq \mathbb{N}$, ALLORA A È DETTO
RICORSIVAMENTE ENUMERABILE (R.E.) SE LA SUA
FUNZIONE CARATTERISTICA PARZIALE

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{SE } x \in A \\ \uparrow & \text{SE } x \notin A \end{cases}$$

È CALCOLABILE (CIOÈ SE IL PREDICATO " $x \in A$ "
È PARZIALMENTE DECIDIBILE).

ESEMPI

1. SIA $K = \{x : x \in W_x\}$. ALLORA K E' R.I.E. MA NON RICORSIVO
2. OGNI INSIEME RICORSIVO E' R.I.E.
3. L'INSIEME $\{x : W_x \neq \emptyset\}$ E' R.I.E. MA NON RICORSIVO
4. SE f E' UNA FUNZIONE CALCOLABILE, ALLORA L'INSIEME $\text{Ran}(f)$ E' R.I.E.

TEOREMA UN INSIEME È R.E. SE E SOLO SE È IL DOMINIO
DI UNA FUNZIONE UNARIA CALCOLABILE.

DM. SIA $A \subseteq \mathbb{N}$. ALLORA

A È R.E. \iff "x ∈ A" È PARZ. DECIDIBILE

\iff ESISTE $g \in \mathcal{C}_1$ TALE CHE
"x ∈ A" \iff $x \in \text{Dom}(g)$

\iff ESISTE $g \in \mathcal{C}_1$ TALE CHE
 $A = \text{Dom}(g)$ ■

NOTA NE SEGUE CHE w_0, w_1, w_2, \dots È UN'ENUMERAZIONE
CON RIPETIZIONI DI TUTTI GLI INSIEMI R.E.

SE $A = w_e$, ALLORA e È UN INDICE DI A . ■

TEOREMA UN INSIEME A È R.E. SE E SOLO SE ESISTE
UN PREDICATO DECIDIBILE $R(x,y)$ TALE CHE
 $x \in A \iff (\exists y) R(x,y)$

DIV. SIA $A \subseteq \mathbb{N}$. ALLORA

A È R.E. \iff " $x \in A$ " È PARZ. DECIDIBILE

\iff ESISTE UN PREDICATO DECIDIBILE $R(x,y)$
TALE CHE $x \in A \iff (\exists y) R(x,y)$ ■

TEOREMA SIA $M(x, y_1, \dots, y_n)$ UN PREDICATO PARZ. DECIDIBILE.
ALLORA L'INSIEME $\{x : (\exists y_1) \dots (\exists y_n) M(x, y_1, \dots, y_n)\}$ È R.E. ■

RELAZIONE TRA INSIEMI RICORSIVI E INSIEMI R.E.

TEOREMA UN INSIEME A È RICORSIVO SE E SOLO SE A E \bar{A} SONO R.E.

DIM.

A È RICORSIVO \iff " $x \in A$ " È DECIBILE

\iff " $x \in A$ " È PARZ. DEC, E " $x \notin A$ " È PARZ. DEC,

\iff " $x \in A$ " È PARZ. DEC, E " $x \in \bar{A}$ " È PARZ. DEC,

\iff A È R.E. E \bar{A} È R.E.



CARATTERIZZAZIONE DEGLI INSIEMI R.E.

TEOREMA SIA $A \subseteq \mathbb{N}$. LE SEGUENTI ASSERTIONI SONO EQUIVALENTI:

- (a) A È R.E.
- (b) $A = \emptyset$ OPPURE A È IL RANGE DI UNA FUNZIONE CALCOLABILE TOTALE UNARIA
- (c) A È IL RANGE DI UNA FUNZIONE CALCOLABILE (PARZIALE)

DIM DIMOSTREREMO LA CATENA DI IMPLICAZIONI (a) \rightarrow (b) \rightarrow (c) \rightarrow (a)

(a) \rightarrow (b). SUPPONIAMO CHE $A \neq \emptyset$ E SIA $a \in A$.

INOLTRE, SIA f UNA FUNZIONE CALCOLABILE UNARIA TALE CHE $A = \text{Dom}(f)$ E SIA e TALE CHE $f = \phi_e$.

SI CONSIDERI LA SEGUENTE FUNZIONE BINARIA

$$g(x, t) = \begin{cases} x & \text{SE } P_e(x) \downarrow \text{ IN AL PIÙ } t \text{ PASSI} \\ a & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

CHIARAMENTE, $A = \text{Ran}(g)$ E g È CALCOLABILE.

- SI PONGA $h(z) = g((z)_1, (z)_2)$.

- SI HA: $A = \text{Ran}(g) = \text{Ran}(h)$

(b) \rightarrow (c), BANALE

(c) \rightarrow (a), SIA $A = \text{Ran}(h)$, CON h FUNZIONE CALCOLABILE U-ARIA.

ALLORA:

$$x \in A \iff (\exists y_1) \dots (\exists y_m) (h(y_1, \dots, y_m) = x)$$

POICHE' IL PREDICATO " $h(y_1, \dots, y_m) = x$ " E' PARZ. DECIDIBILE,

NE SEGUE CHE $(\exists y_1) \dots (\exists y_m) (h(y_1, \dots, y_m) = x)$ E' PARZ. DECIDIB.

E QUINDI $x \in A$ E' R.E. ■

- LA CARATTERIZZAZIONE

$A \neq \emptyset$ E' R.E. $\iff A = \text{Ran}(h)$, PER QUALCHE $h \in \mathcal{C}_1$
TOTALE

E' QUELLA CHE GIUSTIFICA IL NOME RICORSIVAMENTE
ENUMERABILE,

INFATTI LA FUNZIONE h CONSENTE DI ENUMERARE IN
MANIERA EFFETTIVA (RICORSIVA) GLI ELEMENTI DI

$$A = \{h(0), h(1), h(2), \dots\}$$

- SI OSSERVI INOLTRE CHE E_0, E_1, E_2, \dots COSTITUISCE
UN'ENUMERAZIONE EFFETTIVA (CON RIPETIZIONI)
DEGLI INSIEMI R.E.

- UN'ALTRA CARATTERIZZAZIONE INFORMALE DEGLI INSIEMI R.E. E' CHE SONO QUEGLI INSIEMI PER CUI ESISTE UNA PROCEDURA EFFETTIVA IN GRADO DI GENERARNE GLI ELEMENTI.

INFATTI, SE UN INSIEME A E' COSI' GENERATO, POSSIAMO DEFINIRE LA SEGUENTE FUNZIONE EFFETTIVA

$f(0)$ = PRIMO ELEMENTO GENERATO DALLA PROCEDURA

$f(1)$ = SECONDO ELEMENTO GENERATO DALLA PROCEDURA

⋮

$f(n)$ = $(n+1)$ -ESIMO ELEMENTO GENERATO DALLA PROCEDURA

...

PER LA TESI DI CHURCH f E' CALCOLABILE ED INOLTRE VALE $A = \text{Ran}(f)$

TEOREMA L'INSIEME $\{x: \phi_x \text{ È TOTALE}\}$ NON È R.E.

DIM SUPPONIAMO PER ASSURDO CHE $\{x: \phi_x \text{ È TOTALE}\}$ SIA R.E.

È SIA $f \in \mathcal{C}_1$ TOTALE TALE CHE

$$\{x: \phi_x \text{ È TOTALE}\} = \text{Ran}(f)$$

- PONIAMO

$$g(x) = \phi_{f(x)} + 1$$

- CHIARAMENTE g È CALCOLABILE E TOTALE E

QUINDI PER QUALCHE INDICE n SI HA $g = \phi_{f(n)}$

- PERTANTO

$$\phi_{f(n)}(n) = g(n) = \phi_{f(n)}(n) + 1, \quad \text{ASSURDO}$$

- QUINDI $\{x: \phi_x \text{ È TOTALE}\}$ NON È R.E. ■

TEOREMA SE $A \in B$ SONO R.E., ALLORA TALI SONO
 $A \cup B \in A \cap B$.

DIM - SE $A = \emptyset$ O $B = \emptyset$, CHIARAMENTE $A \cup B \in$ R.E.

- SE $A = \text{Ran}(f)$ E $B = \text{Ran}(g)$, CON $f, g \in \mathcal{C}_1$ TOTALI,

SI PONGA:

$$h(x) = \begin{cases} f(x/2) & \text{SE } x \text{ E' PARI} \\ g(x+1/2) & \text{SE } x \text{ E' DISPARI} \end{cases}$$

SI HA CHE: $h \in \mathcal{C}_1$ E $A \cup B = \text{Ran}(h)$ E QUINDI

$A \cup B \in$ R.E.

- SIA $A = \text{Dom}(f)$ E $B = \text{Dom}(g)$, CON f, g CALCOLABILI

ALLORA $A \cap B = \text{Dom}(fg)$ E POICHE' $fg \in$ CALCOLABILE,

SI HA CHE $A \cap B \in$ R.E. ■

TEOREMA UN INSIEME INFINITO E' RICORSIVO SE E SOLO SE E' IL RANGE DI UNA FUNZIONE CALCOLABILE TOTALE UNARIA E CRESCENTE

DM SIA A INFINITO E RICORSIVO. ALLORA A E' ENUMERATO DALLA SEGUENTE FUNZIONE CRESCENTE

$$\begin{cases} f(0) = \mu y (y \in A) \\ f(m+1) = \mu y (y \in A \text{ and } y > f(m)) \end{cases}$$

- f E' CALCOLABILE PER
 - MINIMALIZZAZIONE
 - RICORSIONE
 - RICORSIVITA' DI A

- VICEVERSA, SIA $A = \text{Ran}(f)$, CON $f \in \mathcal{C}_1$ TOTALE E CRESCENTE.

- CHIARAMENTE $f(n) \geq n$, PER OGNI $n \in \mathbb{N}$.

QUINDI SI HA:

$$y \in A \iff y \in \text{Ran}(f)$$

$$\iff (\exists n) (f(n) = y)$$

$$\iff (\exists n \leq y) (f(n) = y)$$

- POICHE' IL PREDICATO $(\exists n \leq y) (f(n) = y)$ E' DECIDIBILE, NE SEGUE LA RICORSIVITA' DI A .

TEOREMA OGNI INSIEME R.E. INFINITO HA UN SOTTOINSIEME
RICORSIVO INFINITO

DIM. - SIA $A = \text{Ran}(f)$, CON $f \in \mathcal{C}_1$ TOTALE

- PONIAMO

$$g(0) = f(0)$$

$$g(n+1) = f(\mu y (f(y) > g(n)))$$

- SI HA CHE

- g E' CALCOLABILE
- g E' TOTALE
- g E' CRESCENTE
- $\text{Ran}(g) \subseteq \text{Ran}(f)$

- PERTANTO $\text{Ran}(g)$ E' UN SOTTOINSIEME RICORSIVO
INFINITO DI A .

DEFINIZIONE UNA FUNZIONE f SI DICE FINITA SE TALE
E' IL SUO DOMINIO

NOTA OGNI FUNZIONE FINITA SU \mathbb{N}^m E' CALCOLABILE,

NOTAZIONE DATE DUE FUNZIONI f E g PONIAMO
 $f \subseteq g$ SE $f(x) = g(x)$, PER OGNI $x \in \text{Dom}(f)$

TEOREMA (RICE-SHAPIRO)

SIA $A \subseteq \mathbb{Q}$, TALE CHE L'INSIEME $\{x : \phi_x \in A\}$ SIA R.I.E.

ALLORA PER OGNI $f \in \mathbb{Q}$, VALE:

$f \in A \iff$ ESISTE UNA FUNZIONE FINITA $\theta \in A$ TALE
CHE $\theta \subseteq f$

COROLLARIO 1

SIA $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}_1$, SE ESISTE $f \in \mathcal{A}$ (CON DOMINIO INFINITO) TALE CHE
PER OGNI RESTRIZIONE FINITA $\vartheta \subseteq f$ SI ABBIAM $\vartheta \notin \mathcal{A}$,
ALLORA $\{x: \phi_x \in \mathcal{A}\}$ NON E' R.E. ■

APPLICAZIONE: L'INSIEME $\{x: \phi_x \text{ E' TOTALE}\}$ NON E' R.E.

INFATTI: SIA $\mathcal{A}_1 = \{f \in \mathcal{C}_1: f \text{ E' TOTALE}\}$.

- OGNI $f \in \mathcal{A}$ HA DOMINIO INFINITO,
- INOLTRE \mathcal{A}_1 NON CONTIENE ALCUNA FUNZIONE CON DOMINIO FINITO.

QUINDI, PER IL COROLLARIO 1, $\{x: \phi_x \in \mathcal{A}_1\} = \{x: \phi_x \text{ E' TOTALE}\}$
NON E' R.E. ■

COROLLARIO 2

SIA $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}_1$, SE ESISTE UNA FUNZIONE FINITA $\vartheta \in \mathcal{A}$ AVENTE UN'ESTENSIONE CALCOLABILE $f \equiv \vartheta$ TALE CHE $f \notin \mathcal{A}$, ALLORA $\{x: \phi_x \in \mathcal{A}\}$ NON E' R.E. ■

APPLICAZIONE: L'INSIEME $\{x: \phi_x \text{ NON E' TOTALE}\}$ NON E' R.E.

INFATTI: SIA $\mathcal{A}_2 = \{f \in \mathcal{C}_1: f \text{ NON E' TOTALE}\}$.

SI CONSIDERI LA FUNZIONE $f_\emptyset \in \mathcal{C}_1$, OVVIAMENTE $f_\emptyset \in \mathcal{A}_2$,
INOLTRE PER OGNI FUNZIONE TOTALE $g \in \mathcal{C}_1$ SI HA $f_\emptyset \subseteq g$

E $g \notin \mathcal{A}_2$.

QUINDI, PER IL COROLLARIO 2, L'INSIEME

$\{x: \phi_x \in \mathcal{A}_2\} = \{x: \phi_x \text{ NON E' TOTALE}\}$ NON E' R.E. ■

ESERCIZI

1. DIMOSTRARE CHE L'INSIEME $\{x: \phi_x \text{ NON È INIETTIVA}\}$ È R.E.

2. PER CIASCUNO DEI SEGUENTI INSIEMI STABILIRE SE

- È RICORSIVO
- È RICORSIVAMENTE ENUMERABILE
- HA UN COMPLEMENTO R.E.

(a) $\{x: x \in E_x\}$

(b) $\{x: x \text{ È UN QUADRATO PERFETTO}\}$

(c) $\{x: \phi_x \text{ È INIETTIVA}\}$

(d) $\{x: \phi_m(x) \uparrow\}$ (m FISSATO)

3. SI UTILIZZI IL TEOREMA DI RICE-SHAPIRO PER DIMOSTRARE CHE I SEGUENTI PROBLEMI NON SONO PARZ. DECIDIBILI

(a) " $W_x = \emptyset$ " (b) " W_x È FINITO" (c) " W_x È INFINITO"

(d) " $\phi_x = \underline{0}$ " (e) " $\phi_x \neq \underline{0}$ "