

PROGRAMMI UNIVERSALI

- SI CONSIDERA LA SEGUENTE FUNZIONE

$$\psi(x, y) =_{\text{def}} \phi_x(y)$$

- LA FUNZIONE $\psi(x, y)$ È UNIVERSALE, IN QUANTO PONENDO

$$g_m(y) =_{\text{def}} \psi(m, y)$$

LA SEQUENZA

$$g_0, g_1, g_2, \dots$$

CONTIENE TUTTE LE FUNZIONI (UNARIE) CALCOLABILI

DEFINIZIONE

LA FUNZIONE UNIVERSALE PER LE FUNZIONI n -ARIE
CALCOLABILI È LA FUNZIONE $(n+1)$ -ARIA $\psi_U^{(n)}$
DEFINITA DA :

$$\psi_U^{(n)}(e, x_1, \dots, x_n) = \phi_e^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$$

PROBLEMA

LE FUNZIONI $\psi_U^{(n)}$ SONO CALCOLABILI?

IN CASO POSITIVO, PER OGNI n ESISTEREBBE UN PROGRAMMA
UNIVERSALE $U^{(n)}$ IN GRADO DI CALCOLARE TUTTE
LE FUNZIONI CALCOLABILI n -ARIE
(ESISTENZA DEI CALCOLATORI UNIVERSALI)

TEOREMA PER OGNI $n \geq 1$, LA FUNZIONE UNIVERSALE $\psi_U^{(n)}$
E' CALCOLABILE.

DIM. (INFORMALE)

- SIA $n \geq 1$ FISSATO

- DATI

- UN INDICE e

- UNA n -UPLA \vec{x}

POSSIAMO CALCOLARE $\psi_U^{(n)}(e, \vec{x})$ COME SEGUE:

- SI COSTRUISCA IL PROGRAMMA P_e

- SI SIMULI P_e SULL' INPUT \vec{x}

- PER LA TESI DI CHURCH, $\psi_U^{(n)}$ E' CALCOLABILE

TEOREMA PER OGNI $n \geq 1$, LA FUNZIONE UNIVERSALE $\psi_U^{(n)}$
E' CALCOLABILE.

DIM. (UN PO' MENO INFORMALE)

- CODIFICHEREMO CON UN UNICO INTERO σ LA CONFIGURAZIONE CORRENTE
- FAREMO VEDERE CHE LA DIPENDENZA DI σ DA
 - CODICE DI PROGRAMMA q
 - INPUT \vec{x}
 - NUMERO DI PASSI t GIA' ESEGUITI

E' ESPRIMIBILE MEDIANTE UNA FUNZIONE
CALCOLABILE.

- LA CONFIGURAZIONE CORRENTE DELLA COMPUTAZIONE

$P_e(\vec{x})$ E' COMPLETAMENTE SPECIFICATA DA:

- STATO CORRENTE DEI REGISTRI R_1, R_2, \dots
- INDICE j DELL'ISTRUZIONE SUCCESSIVA

- POICHE' AD OGNI PASSO DI UNA COMPUTAZIONE IL NUMERO DEI REGISTRI NON NULLI E' FINITO, LO STATO CORRENTE PUO' ESSERE CODIFICATO

DAL NUMERO

$$st = 2^{r_1} \cdot 3^{r_2} \cdot 5^{r_3} \cdot \dots = \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{r_i}$$

(CODICE DELLA CONFIGURAZIONE)

- SI OSSERVA CHE VALE:

$$r_i = (st)_i$$

- LA DESCRIZIONE COMPLETA DELLO STATO CORRENTE È
QUINDI DATA DAL NUMERO $c = \pi(st, j)$

(STATO DELLA COMPUTAZIONE $P_e(\vec{x})$)

• SI OSSERVI CHE
$$\begin{cases} st = \pi_1(c) \\ j = \pi_2(c) \end{cases}$$

- I VALORI st, j, c CAMBIANO NEL CORSO DELLA
COMPUTAZIONE E DIPENDONO DA

• CODICE DI PROGRAMMA e

• INPUT \vec{x}

• NUMERO DI PASSI GIÀ COMPLETATI t

- PERTANTO DEFINIAMO LE SEGUENTI FUNZIONI:

$st_n(e, \vec{x}, t) =$ STATO DOPO t PASSI DI $P_e(\vec{x})$
(OVVERO, STATO FINALE DI $P_e(\vec{x})$ QUALORA
QUESTI SI FERMI PRIMA DI t PASSI)

$j_n(e, \vec{x}, t) =$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{INDICE DELLA SUCCESSIVA} \\ \text{ISTRUZIONE PER } P_e(\vec{x}) \\ \text{DOPO IL COMPLETAMENTO} \\ \text{DEL } t\text{-ESIMO PASSO} \\ 0 \end{array} \right.$

SE $P_e(\vec{x})$ NON E'
ANCORA TERMINATA
DOPO t PASSI

ALTRIMENTI

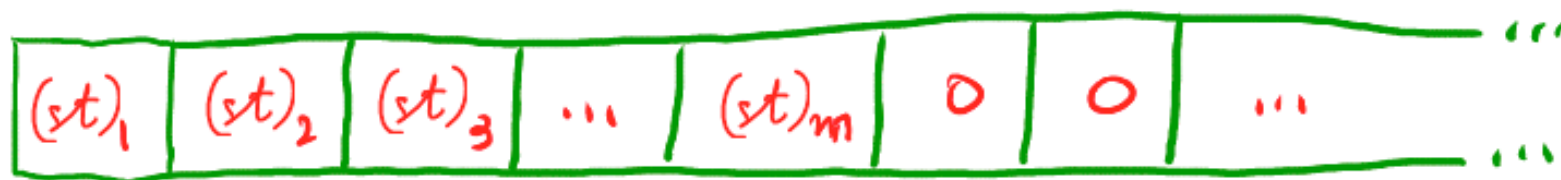
$c_n(e, \vec{x}, t) = \pi(st_n(e, \vec{x}, t), j_n(e, \vec{x}, t))$ (CONFIG DI $P_e(\vec{x})$
DOPO t PASSI)

NOTA: n E' LA LUNGHEZZA DI \vec{x}

- IL VALORE $c_n(e, \vec{x}, t+1)$ PUO' ESSERE CALCOLATO EFFETTIVAMENTE DA $c_n(e, \vec{x}, t)$ ED e COME SEGUE:
 - SIANO $s_t = \pi_1(c_n(e, \vec{x}, t))$
 $j = \pi_2(c_n(e, \vec{x}, t))$
 - SE $j=0$, SI PONGA $c_n(e, \vec{x}, t+1) = c_n(e, \vec{x}, t)$
(IN QUANTO LA COMPUTAZIONE E' TERMINATA)

• ALTRIMENTI,

★ SI COSTRUISCANO LO STATO CODIFICATO DA st



ED IL PROGRAMMA $P_e = \gamma^{-1}(e)$ CODIFICATO DA e .

★ SI ESEGUA LA j -ESIMA ISTRUZIONE DI P_e SULLA CONFIGURAZIONE DI SOPRA.

SIA st' IL CODICE DEL NUOVO STATO E SIA j' L'INDICE DELLA SUCCESSIVA ISTRUZIONE ($j'=0$ SE LA COMPUTAZIONE E' TERMINATA)

★ SI PONGA $c_n(e, \vec{x}, t+1) = \pi(st', j')$

- PER LA TESI DI CHURCH, $\pi(st', j')$ E' FUNZIONE
CALCOLABILE DI $c_n(e, \vec{x}, t)$ ED e ,

- ABBIAMO CIOE':

$$c_n(e, \vec{x}, t+1) = f(e, c_n(e, \vec{x}, t))$$

PER UNA OPPORTUNA FUNZIONE CALCOLABILE f

- INOLTRE

$$c_n(e, \vec{x}, 0) = \pi(p_1^{x_1} \dots p_n^{x_n}, 1)$$

- QUINDI PER RICORSIONE LA FUNZIONE

$c_n(e, \vec{x}, t)$ E' CALCOLABILE, DA CUI ANCHE
LA CALCOLABILITA' DI $st_n(e, \vec{x}, t)$ E $j_n(e, \vec{x}, t)$,

- INFATTI, SI DIMOSTRA CHE LE FUNZIONI $c_n(e, \vec{x}, t)$,
 $st_n(e, \vec{x}, t)$ E $j_n(e, \vec{x}, t)$ SONO PRIMITIVE RICORSIVE

- PER CONCLUDERE, SI HA:

$$\Psi_U^{(m)}(e, \vec{x}) = \left(st_n(e, \vec{x}, \mu t(j_n(e, \vec{x}, t) = 0)) \right)_1$$

E PERTANTO LA FUNZIONE UNIVERSALE $\Psi_U^{(m)}(e, \vec{x})$
E' CALCOLABILE. ■

LEMMA PER OGNI $n \geq 1$, I SEGUENTI PREDICATI SONO DECIDIBILI:

(a) $S_n(e, \vec{x}, y, t) \equiv$ " $P_e(\vec{x}) \downarrow y$ IN AL PIU' t PASSI "

(b) $H_n(e, \vec{x}, t) \equiv$ " $P_e(\vec{x}) \downarrow$ IN AL PIU' t PASSI "

DIM. SI HA:

• $S_n(e, \vec{x}, y, t) =$ " $j_n(e, \vec{x}, t) = 0$ AND $(st_n(e, \vec{x}, t))_1 = y$ "

• $H_n(e, \vec{x}, t) =$ " $j_n(e, \vec{x}, t) = 0$ " ■

OSSERVAZIONE

UNA DIMOSTRAZIONE PIU' FORMALE CONSENTE DI VERIFICARE CHE I PREDICATI $S_n(e, \vec{x}, y, t)$ E $H_n(e, \vec{x}, t)$ SONO PRIMITIVI RICORSIVI

COROLLARIO (PRIMO TEOREMA DELLA FORMA NORMALE DI KLEENE)

ESISTONO UNA FUNZIONE CALCOLABILE $U(x)$ E PER OGNI $n \geq 1$ UN PREDICATO DECIDIBILE $T_n(e, \vec{x}, z)$ TALI CHE:

(a) $\phi_e^{(n)}(\vec{x}) \downarrow$ SE E SOLO SE $\exists z T_n(e, \vec{x}, z)$

(b) $\phi_e^{(n)}(\vec{x}) = U(\mu z T_n(e, \vec{x}, z))$

DIM

SI CONSIDERI LA FUNZIONE

$$T_n(e, \vec{x}, z) \stackrel{\text{def}}{=} S_n(e, \vec{x}, (z)_1, (z)_2)$$

SI HA $\phi_e^{(n)}(\vec{x}) \downarrow \iff \exists u \exists v S_n(e, \vec{x}, u, v)$

$\iff \exists z S_n(e, \vec{x}, (z)_1, (z)_2)$

$\iff \exists z T_n(e, \vec{x}, z)$, DA CUI LA (a)

INOLTRE

$$\phi_e^{(n)}(\vec{x}) = (\mu z S_m(e, \vec{x}, (z)_1, (z)_2))_1 = (\mu z T_m(e, \vec{x}, z))_1.$$

PERTANTO, PONENDO $\cup(x) =_{\text{def}} (x)_1$, SI HA LA (b).

OSSERVAZIONE

POICHE' $S_m(e, \vec{x}, y, t)$ E' PRIMITIVA RICORSIVA, SEGUE CHE ANCHE LA FUNZIONE $T_m(e, \vec{x}, z)$ E' PRIMITIVA RICORSIVA, PERTANTO IL TEOREMA DELLA FORMA NORMALE DI KLEENE CONSENTE DI STABILIRE CHE

"CIASCUNA FUNZIONE CALCOLABILE PUO' ESSERE OTTENUTA DA FUNZIONI PRIMITIVE RICORSIVE MEDIANTE AL PIU' UNA SOLA APPLICAZIONE DELL'OPERATORE DI MINIMALIZZAZIONE μ ."

ESERCIZIO

(i) SI DIMOSTRI CHE ESISTE UN PREDICATO DECIDIBILE $Q(x, y, z)$ TALE CHE

$$(a) \quad y \in E_x \iff \exists z Q(x, y, z)$$

$$(b) \quad \text{SE } y \in E_x \text{ E } Q(x, y, z), \text{ ALLORA } \phi_x((z)_1) = y$$

(ii) DA CIÒ SI DEDUCA L'ESISTENZA DI UNA FUNZIONE CALCOLABILE $g(x, y)$ TALE CHE

$$(a) \quad g(x, y) \downarrow \iff y \in E_x$$

$$(b) \quad \text{SE } y \in E_x \text{ ALLORA } g(x, y) \in W_x \text{ E } \phi_x(g(x, y)) = y \\ (\text{CIOÈ } g(x, y) \in \phi_x^{-1}(\{y\}))$$

(iii) SI DEDUCA CHE SE f È UNA FUNZIONE CALCOLABILE E INIETTIVA, ALLORA f^{-1} È CALCOLABILE

TEOREMA

IL PROBLEMA " ϕ_x E' TOTALE " E' INDECIDIBILE

D.M.

- SIA $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{SE } \phi_x \text{ E' TOTALE} \\ 0 & \text{SE } \phi_x \text{ NON E' TOTALE} \end{cases}$

- OCCORRE DIMOSTRARE CHE g NON E' CALCOLABILE

- PONIAMO $f(x) = \begin{cases} \phi_x(x) + 1 & \text{SE } \phi_x \text{ E' TOTALE} \\ 0 & \text{SE } \phi_x \text{ NON E' TOTALE} \end{cases}$

- SI OSSERVI CHE LA FUNZIONE f E' TOTALE, MA NON E' CALCOLABILE, IN QUANTO DIVERSA DA CIASCUNA ϕ_x

- POICHE' $f(x) = \begin{cases} \psi_U(x, x) + 1 & \text{SE } g(x) = 1 \\ 0 & \text{SE } g(x) = 0 \end{cases}$

SE g FOSSE CALCOLABILE ANCHE f LO SAREBBE. DACUI LA TESI ■

TEOREMA

ESISTE UNA FUNZIONE TOTALE CALCOLABILE CHE NON E' PRIMITIVA RICORSIVA

DIM.

- SI PUO' VERIFICARE CHE C'E' UN MODO SISTEMATICO PER GENERARE TUTTE LE FUNZIONI PRIMITIVE RICORSIVE NONCHE' I CODICI DEI CORRISPONDENTI PROGRAMMI URM.

- ES. $\text{Sub}(f; g_1, g_2, \dots, g_m)$ DENOTA LA FUNZIONE

$$\lambda \vec{x}. f(g_1(\vec{x}), g_2(\vec{x}), \dots, g_m(\vec{x}))$$

(PURCHE' f SIA m -ARIA E LE FUNZIONI

g_1, g_2, \dots, g_m SIANO n -ARIE, PER QUALCHE n)

- ANALOGAMENTE, $Rec(f, g)$ DENOTA LA FUNZIONE OTTENUTA PER RICORSIONE DA f E g , PURCHE' f SIA 1-ARIA E g SIA $(n+2)$ -ARIA, PER QUALCHE n .

CIOE', SE
$$\begin{cases} h(\vec{x}, 0) = f(\vec{x}) \\ h(\vec{x}, y+1) = g(\vec{x}, y, h(\vec{x}, y)), \end{cases}$$

ALLORA $Rec(f, g) = \lambda \vec{x}, y. h(\vec{x}, y)$

ESEMPIO: PIANO DI DEFINIZIONE DELLA FUNZIONE $\lambda x, x^2$

1. $g_1 = \text{Sub}(S; U_3^3)$

$$g_1(x, y, z) = U_3^3(x, y, z) + 1 = z + 1$$

2. $g_2 = \text{Rec}(U_1^1, g_1)$

$$\begin{cases} g_2(x, 0) = U_1^1(x) = x \\ g_2(x, y+1) = g_1(x, y, g_2(x, y)) = g_2(x, y) + 1 \end{cases}$$

PERTANTO $g_2(x, y) = x + y$

3. $g_3 = \text{Sub}(g_2; U_1^3, U_3^3)$

$$g_3(x, y, z) = g_2(x, z) = x + z$$

4. $g_4 = \text{Rec}(0, g_3)$

$$\begin{cases} g_4(x, 0) = 0 \\ g_4(x, y+1) = g_3(x, y, g_4(x, y)) = x + g_4(x, y) \end{cases}$$

PERTANTO $g_4(x, y) = xy$

5. $f = \text{Sub}(g_4; U_1^1, U_1^1)$

$$f(x) = g_4(x, x) = x^2$$

(DOVE S E' LA FUNZIONE "SUCCESSORE" $\lambda x, x+1$)

- SIANO PERTANTO

- $\vartheta_0, \vartheta_1, \vartheta_2, \dots$ UN'ENUMERAZIONE DELLE FUNZIONI PRIMITIVE RICORSIVE UNARIE
- $p(m)$ UNA FUNZIONE TOTALE CALCOLABILE TALE CHE $\vartheta_m = \Phi_{p(m)}$

- SI DEFINISCA LA FUNZIONE

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \vartheta_x(x) + 1 = \Phi_{p(x)}(x) + 1 = \Psi_{\cup}(p(x), x) + 1$$

- CHIARAMENTE

- LA FUNZIONE f È TOTALE E CALCOLABILE
- $f \neq \vartheta_m$, PER OGNI $m \geq 0$, CIOÈ f NON È PRIMITIVA RICORSIVA ■

ALCUNE OPERAZIONI EFFETTIVE SU FUNZIONI CALCOLABILI

E' POSSIBILE MANIPOLARE IN MANIERA EFFETTIVA
FUNZIONI O INSIEMI INFINITI ?

IN ALCUNI CASI LA RISPOSTA E' AFFERMATIVA

ESEMPIO 1

DATE ϕ_x E ϕ_y , CALCOLARE UN INDICE DI $\phi_x \phi_y$

DM. SIA $f(x, y, z) =_{\text{def}} \phi_x(z) \cdot \phi_y(z)$

POICHE' $f(x, y, z) = \psi_0(x, z) \cdot \psi_0(y, z)$, SI HA CHE LA FUNZIONE $f(x, y, z)$ E' CALCOLABILE,

QUINDI PER IL TEOREMA S-M-N ESISTE UNA FUNZIONE TOTALE CALCOLABILE $s(x, y)$ TALE CHE

$$f(x, y, z) = \phi_{s(x, y)}(z).$$

PERTANTO, $\phi_x \cdot \phi_y = \phi_{s(x, y)}$, CIOE' UN INDICE DI

$\phi_x \cdot \phi_y$ PUO' ESSERE CALCOLATO IN MANIERA EFFETTIVA

DA x E y , ■

ESEMPIO 2

ESISTE UNA FUNZIONE TOTALE CALCOLABILE $g(x)$ TALE CHE

$$(\phi_x)^2 = \phi_{g(x)}.$$

DIM. SIA $S(x,y)$ LA FUNZIONE TROVATA NELL'ESEMPIO 1,

SI PONGA $g(x) =_{\text{def}} S(x,x)$.

OVVIAMENTE, $g(x)$ È TOTALE E CALCOLABILE E INOLTRE

$$\phi_{g(x)} = \phi_x \cdot \phi_x = (\phi_x)^2. \quad \blacksquare$$

ESEMPIO 3

ESISTE UNA FUNZIONE TOTALE CALCOLABILE $S(x,y)$ TALE CHE

$$W_{S(x,y)} = W_x \cup W_y.$$

DM.

SIA $f(x,y,z) = \begin{cases} 1 & \text{se } z \in W_x \text{ o } z \in W_y \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$

FISSATI x,y , SI PONGA $g(z) = f(x,y,z)$.

SI HA: $\text{Dom}(g_{x,y}) = W_x \cup W_y$.

POI CHE $f(x,y,z) = \underline{1}$ (per $H_1(x,z,t)$ OR $H_1(y,z,t)$)

LA FUNZIONE $f(x,y,z)$ E' CALCOLABILE.

QUINDI ESISTE $S(x,y)$ TOTALE E CALCOLABILE TALE CHE

$f(x,y,z) = \phi_{S(x,y)}(z)$. PERTANTO $W_{S(x,y)} = W_x \cup W_y$. ■

ESEMPIO 4

ESISTE UNA FUNZIONE TOTALE CALCOLABILE $k(x)$ TALE CHE
SE ϕ_x E' INIETTIVA ALLORA $(\phi_x)^{-1} = \phi_{k(x)}$.

Dim.

SIA $g(x, y)$ UNA FUNZIONE CALCOLABILE TALE CHE

$$(a) \quad g(x, y) \downarrow \iff y \in E_x$$

$$(b) \quad \text{SE } y \in E_x \text{ ALLORA } g(x, y) \in W_x \text{ E } \phi_x(g(x, y)) = y$$

(SI VEDA ESERCIZIO PRECEDENTE)

PER IL TEOREMA Σ - \mathcal{M} - \mathcal{N} ESISTE UNA FUNZIONE TOTALE
CALCOLABILE $k(x)$ TALE CHE $g(x, y) = \phi_{k(x)}(y)$.

SI HA: $W_{k(x)} = E_x$, PER OGNI $x \in \mathbb{N}$.

INFATTI:

$$y \in W_{k(x)} \iff \phi_{k(x)}(y) \downarrow \iff g(x, y) \downarrow \iff y \in E_x$$

- SUPPONIAMO ADESSO CHE ϕ_x SIA INIETTIVA, PER QUALCHE $x \in N$.
SI HA: $\text{Dom}(\phi_x^{-1}) = \text{Ran}(\phi_x) = E_x$.

- PERTANTO, PER VERIFICARE CHE $\phi_{k(x)} = \phi_x^{-1}$, E' SUFFICIENTE
PROVARE CHE $\phi_{k(x)}(y) = \phi_x^{-1}(y)$, PER OGNI $y \in E_x$.

MA QUINDI $y \in E_x$.

LA (b) IMPLICA: $g(x, y) \downarrow \in \phi_x(g(x, y)) = y$, CIOE'

$$\phi_x(\phi_{k(x)}(y)) = y.$$

PERTANTO:

$$\phi_{k(x)}(y) = \phi_x^{-1}(\phi_x(\phi_{k(x)}(y))) = \phi_x^{-1}(y). \quad \blacksquare$$

ESERCIZI

- 1) DIMOSTRARE CHE ESISTE UNA FUNZIONE TOTALE CALCOLABILE $k(x)$ TALE CHE SE ϕ_x È LA FUNZIONE CARATTERISTICA DI UN PREDICATO DECIBILE $M(y)$, ALLORA $\phi_{k(x)}$ È LA FUNZIONE CARATTERISTICA DI $\text{not } M(y)$.
- 2) DIMOSTRARE CHE ESISTE UNA FUNZIONE TOTALE CALCOLABILE $k(x)$ TALE CHE PER OGNI x SI ABBIA $E_{k(x)} = W_x$.
- 3) DIMOSTRARE CHE ESISTE UNA FUNZIONE TOTALE CALCOLABILE $s(x, y)$ TALE CHE PER OGNI x, y SI ABBIA $E_{s(x, y)} = E_x \cup E_y$.
- 4) SIA $f(x)$ UNA FUNZIONE CALCOLABILE.
DIMOSTRARE CHE ESISTE UNA FUNZIONE TOTALE CALCOLABILE $k(x)$ TALE CHE PER OGNI x SI ABBIA $W_{k(x)} = f^{-1}(W_x)$.