ENUMERAZIONE DELLE FUNZIONI CALCOLABILI

TERMINOLOGIA

- UN INSIEME X E' ENUMERABILE SE ESISTE UNA BIIEZIONE $f: X \to \mathbb{N}$ SE INOLTRE f ED f^{-1} SONO ANCHE EFFETTIVAMENTE CALCOLABILI, L'INSIEME X SI DIRA' EFFETTIVAMENTE ENUMERABILE

- UN'ENUMERAZIONE DI UN INSIEME X E' UNA SURIEZIONE $g: \mathbb{N} \to X$ (RAPPRESENTATA MEDIANTE $X = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$

  SE g E' ANCHE INIETTIVA, SI DICE ENUMERAZIONE SENZA RIPETIZIONI

TEOREMA

I SEGUENTI INSIEMI SONO EFFETTIVAMENTE ENUMERABILI

(a) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

(b) $\mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+$

(c) $\bigcup_{k>0} \mathbb{N}^k$

DIM

(a)

- SI CONSIDERI LA BIIEZIONE $\pi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ DEFINITA DA

$$\pi(m,n) =_{def} 2^m(2n+1)-1$$

- SI VERIFICA FACILMENTE CHE

$$\pi^{-1}(x) = (\pi_1(x), \pi_2(x)), \text{ CON}$$

$$\pi_1(x) =_{def} (x+1)_1 \qquad \pi_2(x) =_{def} \frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{2^{\pi_1(x)}} - 1\right)$$

- E' CHIARO CHE π E π^{-1} SONO EFFETTIVAMENTE CALCOLABILI

(b) SI CONSIDERI LA BIIEZIONE $\zeta : \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+ \longrightarrow \mathbb{N}$:

$$\zeta(m, n, q) =_{df} \pi(\pi(m-1, n-1), q-1)$$

SI HA:

$$\zeta^{-1}(x) = (\pi_1(\pi_1(x))+1, \pi_2(\pi_1(x))+1, \pi_2(x)+1)$$

ζ E ζ^{-1} SONO EFFETTIVAMENTE CALCOLABILI

(c) SI CONSIDERI LA BIIEZIONE $\tau : \bigcup_{k>0} \mathbb{N}^k \longrightarrow \mathbb{N}$

$$\tau(a_1, \ldots, a_k) =_{df} 2^{a_1} + 2^{a_1+a_2+1} + \ldots + 2^{a_1+a_2+\ldots+a_k+k-1} - 1$$

SIA $x+1 = 2^{b_1} + 2^{b_2} + \ldots + 2^{b_k}$, CON $0 \leq b_1 < b_2 < \ldots < b_k$,

ALLORA $\tau^{-1}(x) = (a_1, \ldots, a_k)$, CON

$a_1 = b_1$, $a_{i+1} = b_{i+1} - b_i - 1$ (PER $i = 1, 2, \ldots, k-1$)

– τ E τ^{-1} SONO EFFETTIVAMENTE CALCOLABILI ∎

NOTAZIONE

$\mathcal{I} =_{def}$ INSIEME DI TUTTE LE ISTRUZIONI URM

$\mathcal{P} =_{def}$ INSIEME DI TUTTI I PROGRAMMI URM

TEOREMA

$\mathcal{I}$ E $\mathcal{P}$ SONO EFFETTIVAMENTE ENUMERABILI

DIM. PONIAMO

$$\beta(Z(n)) = 4(n-1)$$

$$\beta(S(n)) = 4(n-1)+1$$

$$\beta(T(m,n)) = 4\pi(m-1, n-1)+2$$

$$\beta(J(m,n,q)) = 4\zeta(m, n, q)+3$$

- SIA $x = 4u + r$, CON $0 \leq r < 4$.
- SI HA:

$$\beta^{-1}(x) = \begin{cases} Z(u+1) & \text{SE } r=0 \\ S(u+1) & \text{SE } r=1 \\ T(\pi_1(u)+1, \pi_2(u)+1) & \text{SE } r=2 \\ J(m,n,q) & \text{SE } r=3 \end{cases}$$

DOVE $(m,n,q) = \zeta^{-1}(u)$

- E' FACILE CONVINCERSI CHE β E β^{-1} SONO EFFETTIVAMENTE CALCOLABILI, E PERTANTO $\mathcal{J}$ E' EFFETTIVAMENTE ENUMERABILE

- DEFINIAMO LA BIIEZIONE $\gamma : \wp \to \mathbb{N}$ COME SEGUE:
- SIA $P \in \wp$. SE $P = I_1, I_2, \dots, I_s$, PONIAMO

$$\gamma(P) = \tau(\beta(I_1), \dots, \beta(I_s))$$

- E' FACILE VERIFICARE CHE γ E γ^{-1} SONO EFFETTIVAMENTE CALCOLABILI E PERTANTO $\wp$ E' EFFETTIVAMENTE ENUMERABILE

DEFINIZIONE DATO $P \in \wp$, $\gamma(P)$ E' DETTO NUMERO DI GÖDEL DI P (O CODICE DI P)

INOLTRE PONIAMO:

$$P_n = \gamma^{-1}(n)$$

ESEMPI

(a) SIA $P: T(1,3), S(4), Z(6)$.

SI HA:

$$\beta(T(1,3)) = 4\pi(0,2)+2 = 4\left(2^{0}(2\cdot 2+1)-1\right)+2 = 18$$

$$\beta(S(4)) = 4\cdot 3+1 = 13$$

$$\beta(Z(6)) = 4\cdot 5 = 20$$

PERTANTO:

$$\gamma(P) = 2^{18} + 2^{18+13+1} + 2^{18+13+20+2} - 1$$

$$= 2^{18} + 2^{32} + 2^{53} - 1$$

= 262144 + 4294967296 + 9007199254740992 - 1

= 9007203549970431

(3) SIA $n=4127$. CALCOLIAMO P_{4127}

SI HA:

$$4127 = 2^5 + 2^{12} - 1$$

QUINDI $P_{4127} = I_1, I_2$ CON

$$\beta(I_1) = 5 = 4 \times 1 + 1$$

$$\beta(I_2) = 12-5-1 = 6 = 4 \times 1 + 2 = 4\pi(1,0)+2$$

PERTANTO:

$$I_1 = S(2)$$

$$I_2 = T(2,1)$$

CIOE'

$$P_{4127} = S(2), T(2,1)$$

ESERCIZI

CALCOLARE

(a) $\beta(J(3,4,2))$

(b) $\beta^{-1}(503)$

(c) $\gamma(\,T(3,4),\,S(3),\,Z(1))$

(d) P_{100}

DEFINIZIONE

PER OGNI $a \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ PONIAMO

(a) $\phi_a^{(n)} =_{def}$ LA FUNZIONE n-ARIA CALCOLATA DA P_a

(CIOE' LA FUNZIONE $f_{P_a}^{(n)}$)

(b) $W_a^{(n)} =_{def} Dom(\phi_a^{(n)})$

(c) $E_a^{(n)} =_{def} Ran(\phi_a^{(n)})$

PER $n=1$ SCRIVIAMO: ϕ_a, W_a, E_a AL POSTO DI $\phi_a^{(1)}$, $W_a^{(1)}$, $E_a^{(1)}$

ESEMPIO

$$P_{4127} = S(2), T(2,1)$$

QUINDI

$\phi_{4127}(x) = 1$, PER $x \in \mathbb{N}$

$\phi^{(n)}_{4127}(x_1, \dots, x_n) = x_2 + 1$, PER $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{N}$, SE $n > 1$

$W_{4127} = \mathbb{N}$, $E_{4127} = \{1\}$

$W^{(n)}_{4127} = \mathbb{N}^n$, $E^{(n)}_{4127} = \mathbb{N}^+$, SE $n > 1$ ∎

- SE f E' UNA FUNZIONE UNARIA CALCOLABILE, $f = \phi_a$, PER QUALCHE $a \in \mathbb{N}$ (INDICE DI f)
- POICHE' f HA INFINITI INDICI, LA SEQUENZA

$$\phi_0, \phi_1, \phi_2, \ldots$$

E' UNA SEQUENZA CON RIPETIZIONI CHE CONTIENE TUTTE LE FUNZIONI UNARIE CALCOLABILI

- ANALOGAMENTE

$$\phi_0^{(n)}, \phi_1^{(n)}, \phi_2^{(n)}, \ldots$$

E' UNA SEQUENZA CON RIPETIZIONI CHE CONTIENE TUTTE LE FUNZIONI n-ARIE CALCOLABILI

TEOREMA

$\mathcal{C}_n \left(= \{ \phi_a^{(n)} : a \in \mathbb{N} \}\right)$ E' ENUMERABILE

DIM.

DATA L'ENUMERAZIONE CON RIPETIZIONI

$$\phi_0^{(n)}, \phi_1^{(n)}, \phi_2^{(n)}, \dots$$

DI $\mathcal{C}_n$, NE POSSIAMO COSTRUIRE UNA SENZA RIPETIZIONI

$$\phi_{f_n(0)}^{(n)}, \phi_{f_n(1)}^{(n)}, \phi_{f_n(2)}^{(n)}, \dots$$

DOVE

$$f_n(0) = 0$$

$$f_n(m+1) = \mu z \left(\phi_z^{(n)} \notin \{ \phi_{f_n(0)}^{(n)}, \dots \phi_{f_n(m)}^{(n)} \} \right)$$

COROLLARIO

$\mathcal{C}$ E' ENUMERABILE

DIM.

- POICHE' $\mathcal{C} = \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{C}_n$ E CIASCUN $\mathcal{C}_n$ E' ENUMERABILE, SEGUE CHE $\mathcal{C}$ E' ENUMERABILE.
- UN' ENUMERAZIONE ESPLICITA DI $\mathcal{C}$ SENZA RIPETIZIONI E' L'INVERSA DELLA FUNZIONE $\vartheta : \mathcal{C} \to \mathbb{N}$:

$$\vartheta\left(\phi^{(n)}_{f_n(m)}\right) = \pi(m, n-1). \qquad \blacksquare$$

METODO DIAGONALE DI CANTOR

DATA UN'ENUMERAZIONE $x_0, x_1, x_2, \ldots$ DI OGGETTI (FUNZIONI OPPURE INSIEMI DI NUMERI NATURALI) E' POSSIBILE COSTRUIRE UN OGGETTO x DELLA STESSA NATURA DIVERSO DA TUTTI GLI x_i DELL'ENUMERAZIONE

	0	1	2	3	...
x_0	$\boxed{x_0(0)}$	$x_0(1)$	$x_0(2)$	$x_0(3)$	...
x_1	$x_1(0)$	$\boxed{x_1(1)}$	$x_1(2)$	$x_1(3)$	...
x_2	$x_2(0)$	$x_2(1)$	$\boxed{x_2(2)}$	$x_2(3)$	...
x_3	$x_3(0)$	$x_3(1)$	$x_3(2)$	$\boxed{x_3(3)}$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

- E' SUFFICIENTE COSTRUIRE χ IN MODO TALE CHE

$\chi(i) \neq \chi_i(i)$

(SE GLI OGGETTI SONO INSIEMI, $\chi_i(n) = c_{\chi_i}(n)$)

TEOREMA

ESISTE UNA FUNZIONE TOTALE E UNARIA CHE NON E' CALCOLABILE

DIM.

PONIAMO:

$$f(n) = \begin{cases} \phi_n(n) + 1 & \text{SE } \phi_n(n)\downarrow \\ 0 & \text{SE } \phi_n(n)\uparrow \end{cases}$$

- SI HA:

$f \neq \phi_n$, PER OGNI $n \in \mathbb{N}$,

E QUINDI f E' BANALMENTE TOTALE E NON CALCOLABILE ■

ESERCIZI

1. SIA $f(x,y)$ UNA FUNZIONE TOTALE E CALCOLABILE.
   PER $m \in \mathbb{N}$, SIA g_m LA FUNZIONE DEFINITA DA:
   $$g_m(y) =_{def} f(m,y).$$
   SI COSTRUISCA UNA FUNZIONE h TOTALE E CALCOLABILE TALE CHE $h \neq g_m$, PER OGNI $m \in \mathbb{N}$.

2. SIA $f_0, f_1, f_2, \ldots$ UN'ENUMERAZIONE DI FUNZIONI PARZIALI DA $\mathbb{N}$ IN $\mathbb{N}$.
   SI COSTRUISCA UNA FUNZIONE $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ TALE CHE $Dom(g) \neq Dom(f_i)$, PER OGNI $i \in \mathbb{N}$.

3. SIA f UNA FUNZIONE PARZIALE DA $\mathbb{N}$ IN $\mathbb{N}$ E SIA $m \in \mathbb{N}$.

SI COSTRUISCA UNA FUNZIONE NON CALCOLABILE g TALE CHE

$g(x) = f(x)$, PER $0 \leq x \leq m$.

IL TEOREMA DI PARAMETRIZZAZIONE (s-m-n)

SPIEGAZIONE INTUITIVA

- SIA $f(x,y)$ CALCOLABILE
- DATO $a \in \mathbb{N}$ PONIAMO

$$g_a(y) =_{df} f(a,y)$$

- g_a E' CALCOLABILE, QUINDI $g_a = \phi_e$, PER QUALCHE e
- IL TEOREMA DI PARAMETRIZZAZIONE ASSERISCE CHE ESISTE UNA FUNZIONE CALCOLABILE E TOTALE $x \longmapsto k(x)$ TALE CHE

$$g_x = \phi_{k(x)}$$

TEOREMA (S-m-n - FORMA SEMPLICE)

SIA $f(x,y)$ UNA FUNZIONE CALCOLABILE.
ALLORA ESISTE UNA FUNZIONE TOTALE CALCOLABILE $k(x)$ TALE CHE $f(x,y) = \phi_{k(x)}(y)$.

DIM.

SIA F UN PROGRAMMA URM CHE CALCOLA f.
PER OGNI $a \in \mathbb{N}$, SIA Q_a IL SEGUENTE PROGRAMMA:

$$
\begin{array}{l}
T(1,2) \\
Z(1) \\
\left.\begin{array}{l} S(1) \\ \vdots \\ S(1) \end{array}\right\} a \text{ VOLTE} \\
F
\end{array}
$$

- IL PROGRAMMA Q_a CALCOLA LA FUNZIONE UNARIA $f(a, y)$
- PONIAMO $k(x) =$ CODICE DEL PROGRAMMA Q_x
- LA FUNZIONE $k(x)$ E'
  - TOTALE
  - EFFETTIVAMENTE CALCOLABILE
- QUINDI, PER LA TESI DI CHURCH, $k(x)$ E' UNA FUNZIONE TOTALE CALCOLABILE E, PER COSTRUZIONE, VALE

$$f(x, y) = \Phi_{k(x)}(y)$$

ESEMPI

1. SIA $f(x,y) = y^x$.

PER IL TEOREMA S-m-n ESISTE UNA FUNZIONE TOTALE CALCOLABILE $k(x)$ TALE CHE

$$\phi_{k(x)}(y) = y^x$$

2. SIA $f(x,y) = \begin{cases} y & \text{SE } y \text{ E' UN MULTIPLO DI } x \\ \uparrow & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$

POICHE' $f(x,y)$ E' CALCOLABILE, ESISTE $k(x)$ CALCOLABILE TALE CHE $\phi_{k(x)}(y) = f(x,y)$. QUINDI PER OGNI n

$\phi_{k(n)}(y)\downarrow \iff y$ E' UN MULTIPLO DI n

PERTANTO: $W_{k(n)} = n\mathbb{N} = E_{k(n)}$

TEOREMA (S-M-N - FORMA GENERALE)

DATI $m, n \geq 1$, ESISTE UNA FUNZIONE TOTALE CALCOLABILE $s^m_n(z, \vec{x})$ TALE CHE

$$\phi_z^{(m+n)}(\vec{x}, \vec{y}) = \Phi^{(n)}_{s^m_n(z, \vec{x})}(\vec{y})$$

CON $\vec{x} = (x_1, \dots, x_m)$ E $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$.

DIM

PER $i \geq 1$ SIA $Q(i, x)$ IL SEGUENTE PROGRAMMA:

$$\begin{array}{l} Z(i) \\ \left.\begin{array}{l} S(i) \\ \vdots \\ S(i) \end{array}\right\} x \text{ VOLTE} \end{array}$$

(CARICA x NEL REGISTRO R_i)

- FISSATI m ED n DEFINIAMO $S^m_n(z,\vec{x})$ COME IL CODICE DEL SEGUENTE PROGRAMMA:

$$\left.\begin{array}{l} T(n, m+n) \\ \vdots \\ T(2, m+2) \\ T(1, m+1) \end{array}\right\} \text{ COPIA } R_1, R_2, \dots, R_n \text{ IN } R_{m+1}, R_{m+2}, \dots, R_{m+n}$$

$$\left.\begin{array}{l} Q(1, x_1) \\ Q(2, x_2) \\ \vdots \\ Q(m, x_m) \end{array}\right\} \text{ CARICA } x_1, x_2, \dots, x_m \text{ IN } R_1, R_2, \dots, R_m$$

$$\left.\begin{array}{l} P_z \end{array}\right\} \text{ PROGRAMMA CON CODICE } z$$

- PER COSTRUZIONE $\Phi^{(n)}_{S^m_n(z,\vec{x})}(\vec{y}) = \Phi^{(n+m)}_z(\vec{x},\vec{y})$

- INOLTRE, PER LA TESI DI CHURCH, $S_m^n(z,\vec{x})$ E' CALCOLABILE, IN QUANTO ESSA E' EFFETTIVAMENTE CALCOLABILE
- PERTANTO SI HA LA TESI ∎

OSSERVAZIONE

- LE FUNZIONI S_n^m SONO PRIMITIVE RICORSIVE
- LA DIPENDENZA DI S_n^m DA n E' ELIMINABILE, CIOE'

$\forall m, n \geq 1 \quad \exists\, s^m : \mathbb{N}^{m+1} \to \mathbb{N}$ TALE CHE

$$\phi_z^{(m+n)}(\vec{x},\vec{y}) = \Phi^{(n)}_{s^m(z,\vec{x})}(\vec{y})$$

ESERCIZI

1. DIMOSTRARE L'ESISTENZA DI UNA FUNZIONE TOTALE CALCOLABILE $k(x)$ TALE CHE PER OGNI n $k(n)$ SIA UN INDICE DELLA FUNZIONE $\lfloor \sqrt[n]{x} \rfloor$

2. DIMOSTRARE L'ESISTENZA DI UNA FUNZIONE TOTALE CALCOLABILE $k(x)$ TALE CHE PER OGNI n

$$W_{k(n)} = \text{INSIEME DELLE POTENZE } n\text{-ESIME PERFETTE}$$

3. SIA $n \geq 1$. DIMOSTRARE L'ESISTENZA DI UNA FUNZIONE TOTALE CALCOLABILE $s(x)$ TALE CHE

$$W^{(n)}_{s(x)} = \{ (y_1, \dots, y_n) : y_1 + y_2 + \dots + y_n = x \}$$