ALTRI APPROCCI ALLA CALCOLABILITA'

GÖDEL-HERBRAND-KLEENE (1936)

FUNZIONI RICORSIVE GENERALI ESPRESSE MEDIANTE UN CALCOLO EQUAZIONALE

CHURCH (1936)

LAMBDA CALCOLO

GÖDEL-KLEENE (1936)

FUNZIONI μ-RICORSIVE E FUNZIONI PARZIALI RICORSIVE

TURING (1936)

FUNZIONI CALCOLABILI MEDIANTE "MACCHINE DI TURING"

./.

ALTRI APPROCCI ALLA CALCOLABILITA' 2

POST (1943)

FUNZIONI DEFINITE MEDIANTE SISTEMI DEDUTTIVI CANONICI

MARKOV (1951)

FUNZIONI DEFINITE DA ALGORITMI SU STRINGHE

SHEPERDSON - STURGIS (1963)

FUNZIONI URM - CALCOLABILI

RISULTATO FONDAMENTALE DELLA TEORIA DELLA CALCOLABILITÀ

TUTTE LE PROPOSTE PRECEDENTI CARATTERIZZANO LA MEDESIMA CLASSE DI FUNZIONI CALCOLABILI

FUNZIONI PARZIALI RICORSIVE

DEFINIZIONE LA CLASSE $\mathcal{R}$ DELLE FUNZIONI PARZIALI RICORSIVE E' LA PIÙ PICCOLA FAMIGLIA DI FUNZIONI PARZIALI CHE

- CONTIENE LE FUNZIONI INIZIALI

  $\underline{0}$, $x+1$, U_i^m

- E' CHIUSA RISPETTO ALLE OPERAZIONI DI

  - SOSTITUZIONE
  - RICORSIONE PRIMITIVA
  - MINIMALIZZAZIONE

OSSERVAZIONE:

GÖDEL E KLEENE INIZIALMENTE HANNO STUDIATO LA CLASSE $\mathcal{R}_0$ DELLE FUNZIONI μ-RICORSIVE DEFINITA COME $\mathcal{R}$ CON LA DIFFERENZA CHE LA MINIMALIZZAZIONE μ E' CONSENTITA SOLO QUANDO PRODUCE FUNZIONI TOTALI.

FAREMO VEDERE CHE

$$\mathcal{R}_0 = \mathcal{R} \cap TOT$$

CON TOT FAMIGLIA DELLE FUNZIONI TOTALI

TEOREMA

$$\mathcal{R} = \mathcal{C}_{URM}$$

DIM

- PER QUANTO PRECEDENTEMENTE VISTO SI HA

$$\mathcal{R} \subseteq \mathcal{C}_{URM}$$

- VICEVERSA, SIA $f(\vec{x})$ UNA FUNZIONE URM-CALCOLABILE

  E SIA $P = I_1, I_2, \ldots, I_s$ UN PROGRAMMA CHE CALCOLA $f(\vec{x})$

- POSSIAMO SUPPORRE, SENZA PERDERE IN GENERALITÀ, CHE

  (a) P SIA IN FORMA STANDARD

  (b) SE I_j E' L'ISTRUZIONE $J(m,n,q)$, ALLORA

  $q \neq j+1$, PER $j = 1, 2, \ldots, s-1$

- SI CONSIDERINO LE SEGUENTI FUNZIONI

  COLLEGATE ALLE COMPUTAZIONI DI P

- DATO UNO STATO $\vec{r}=(r_1, r_2, r_3, \dots)$ DEI REGISTRI, IN CUI AL PIÙ UN NUMERO FINITO DI REGISTRI PUÒ CONTENERE VALORI DIVERSI DA ZERO, ESSO PUÒ ESSERE CODIFICATO IN MANIERA EFFETTIVA

CON $\mathrm{cod}(\vec{r}) = 2^{r_1} \cdot 3^{r_2} \cdot 5^{r_3} \cdot \dots = \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{r_i}$

- QUINDI UNA CONFIGURAZIONE $(j, \vec{r})$ PUÒ ESSERE CODIFICATA

CON $\pi(j, \mathrm{cod}(\vec{r}))$

- DATO IL PROGRAMMA P, INDICHIAMO CON $c_p(\vec{x}, t)$ LA CODIFICA DELLA CONFIGURAZIONE DELLA COMPUTAZIONE $P(\vec{x})$ DOPO t PASSI.

- LA FUNZIONE $c_p(\vec{x}, t)$ E' PRIMITIVA RICORSIVA

$$\begin{cases} c_p(\vec{x}, 0) = \pi(1, 2^{x_1} \cdot 3^{x_2} \cdot \dots \cdot p_n^{x_n}) \\ c_p(\vec{x}, t+1) = \pi(j, st) \end{cases}$$

DOVE j E st SONO DEFINITI NEI LUCIDI SEGUENTI.

PER COMODITA', USEREMO LE SEGUENTI NOTAZIONI

$j_p(\vec{x}, t) = \pi_1(c_p(\vec{x}, t))$ (CONTATORE DI PROGRAMMA DOPO t PASSI)

$st_p(\vec{x}, t) = \pi_2(c_p(\vec{x}, t))$ (STATO DEI REGISTRI DOPO t PASSI)

$$
j = \begin{cases}
j_p(\vec{x},t) + 1 & \text{- SE } 1 \leq j_p(\vec{x},t) < s \text{ E L'ISTRUZIONE } I_{j_p(\vec{x},t)} \text{ E' } \begin{cases} Z(n) \\ S(n) \\ T(m,n) \end{cases} \\
& \text{OPPURE} \\
& \bullet \text{ L'ISTRUZIONE } I_{j_p(\vec{x},t)} \text{ E' } J(m,n,q) \\
& \text{E } (st_p(\vec{x},t))_m \neq (st_p(\vec{x},t))_n \\
q & \text{- SE } 1 \leq j_p(\vec{x},t) \leq s, \text{ L'ISTRUZIONE } I_{j_p(\vec{x},t)} \text{ E' } J(m,n,q), \text{ CON } 1 \leq q \leq s, \\
& \text{E } (st_p(\vec{x},t))_m = (st_p(\vec{x},t))_n \\
0 & \text{- ALTRIMENTI, CIOE'} \\
& \bullet \text{ SE } j_p(\vec{x},t) = s \text{ E L'ISTRUZIONE } I_{j_p(\vec{x},t)} \text{ E' } \begin{cases} Z(n) \\ S(n) \\ T(m,n) \end{cases} \\
& \bullet \text{ SE } j_p(\vec{x},t) = s, \text{ L'ISTRUZIONE } I_{j_p(\vec{x},t)} \text{ E' } J(m,n,q) \\
& \text{E } (st_p(\vec{x},t))_m \neq (st_p(\vec{x},t))_n \\
& \bullet \text{ SE } 1 \leq j_p(\vec{x},t) \leq s, \; I_{j_p(\vec{x},t)} \text{ E' } J(m,n,q), \text{ CON } q = s+1, \\
& \text{E } (st_p(\vec{x},t))_m = (st_p(\vec{x},t))_n \\
& \bullet \text{ SE } j_p(\vec{x},t) = 0
\end{cases}
$$

$$
st = \begin{cases}
qt\left(p_n^{(st_p(\vec{x},t))_n},\ st_p(\vec{x},t)\right) & \text{- SE } 1 \leq j_p(\vec{x},t) \leq s \text{ E L'ISTRUZIONE } I_{j_p(\vec{x},t)} \text{ E' } Z(n) \\
p_n \cdot st_p(\vec{x},t) & \text{- SE } 1 \leq j_p(\vec{x},t) \leq s \text{ E L'ISTRUZIONE } I_{j_p(\vec{x},t)} \text{ E' } S(n) \\
qt\left(p_n^{(st_p(\vec{x},t))_n},\ st_p(\vec{x},t)\right) \cdot p_n^{(st_p(\vec{x},t))_m} & \text{- SE } 1 \leq j_p(\vec{x},t) \leq s \text{ E L'ISTRUZIONE } I_{j_p(\vec{x},t)} \text{ E' } T(m,n) \\
st_p(\vec{x},t) & \text{- SE } 1 \leq j_p(\vec{x},t) \leq s \text{ E L'ISTRUZIONE } I_{j_p(\vec{x},t)} \text{ E' } J(m,n,q) \text{ OPPURE } j_p(\vec{x},t) = 0
\end{cases}
$$

- SE $f_p(\vec{x})\downarrow$, ALLORA $P(\vec{x})$ SI FERMA ESATTAMENTE DOPO t_0 PASSI, DOVE

$$t_0 = \mu t\,(j_p(\vec{x},t)=0)$$

E IN TAL CASO SI HA:

$$f_p(\vec{x}) = (st_p(\vec{x},t_0))_1$$

- SE $f_p(\vec{x})\uparrow$, ALLORA LA COMPUTAZIONE $P(\vec{x})$ DIVERGE, E SI HA:

$$\mu t\,(j_p(\vec{x},t)=0)\uparrow$$

- PERTANTO, VALE LA SEGUENTE RELAZIONE

$$f(\vec{x}) = f_p(\vec{x}) = (st_p(\vec{x},\mu t(j_p(\vec{x},t)=0)))_1$$

CIOE': $f(\vec{x}) = (\pi_2(c_p(\vec{x},\mu t(\pi_1(c_p(\vec{x},t))=0))))_1$

DA CUI SEGUE CHE $f_p(\vec{x})$ E' <u>PARZIALE RICORSIVA</u>

- QUINDI SI HA $\mathcal{C}_{URM} \subseteq \mathcal{R}$, E QUEST'ULTIMA IMPLICA $\mathcal{C}_{URM} = \mathcal{R}$. ∎

COROLLARIO

$$R_0 = R \cap TOT$$

DIM

- ABBIAMO GIA' OSSERVATO CHE VALE $R_0 \subseteq R \cap TOT$.
- SIA $f(\vec{x}) \in R \cap TOT$.
- QUINDI $f(\vec{x}) \in \mathcal{C}_{URM}$ E SIA P UN PROGRAMMA CHE CALCOLA $f(\vec{x})$
- SI CONSIDERI LA FUNZIONE $c_p(\vec{x}, t)$.
- POICHE' $f(\vec{x})\downarrow \iff \mu t(\pi_1(c_p(\vec{x},t)) = 0)\downarrow$ E $f(\vec{x})$ E' TOTALE, $\mu t(\pi_1(c_p(\vec{x},t)) = 0)$ E' TOTALE E QUINDI $\mu t(\pi_1(c_p(\vec{x},t)) = 0)$ APPARTIENE A R_0
- MA $f(\vec{x}) = (\pi_2(c_p(\vec{x}, \mu t(\pi_1(c_p(\vec{x},t)) = 0))))_1$, E QUINDI $f(\vec{x}) \in R_0$.

■

TESI DI CHURCH

LA CLASSE DELLE FUNZIONI INTUITIVAMENTE CALCOLABILI COINCIDE CON LA CLASSE $\mathcal{C}_{URM}$ DELLE FUNZIONI URM-CALCOLABILI

A SUPPORTO DELLA TESI DI CHURCH

- TEOREMA FONDAMENTALE DELLA CALCOLABILITÀ
- COLLEZIONE DELLE FUNZIONI PER LE QUALI ESISTE UNA DIMOSTRAZIONE DI APPARTENENZA A $\mathcal{C}_{URM}$
- POSSIBILITÀ DI SIMULARE EFFETTIVAMENTE I PROGRAMMI URM
- MANCANZA DI CONTROESEMPI DI FUNZIONI EFFETTIVAMENTE CALCOLABILI MA NON URM-CALCOLABILI

- UTILIZZEREMO LA TESI DI CHURCH PER CONCLUDERE CHE UNA DATA FUNZIONE PER LA QUALE SIA DISPONIBILE UN ALGORITMO INFORMALE DI CALCOLO E' CALCOLABILE
- IN TALI SITUAZIONI PARLEREMO DI DIMOSTRAZIONI MEDIANTE LA TESI DI CHURCH
- E' SOTTINTESO CHE, QUALORA VENGA RICHIESTO, SI DEBBA ESSERE IN GRADO DI DARE UNA DIMOSTRAZIONE FORMALE DI CALCOLABILITA'

ESEMPIO 1

SIA P UN PROGRAMMA URM.

SI DEFINISCA LA FUNZIONE

$$f(x,y,t) = \begin{cases} 1 & \text{SE } P(x)\downarrow y \text{ IN AL PIÙ } t \text{ PASSI DI COMPUTAZIONE} \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

- UN ALGORITMO INFORMALE PER CALCOLARE f E' IL SEGUENTE:
  - SI SIMULI P PER t PASSI CON INPUT x
  - SE P SI FERMA E IL CONTENUTO DI R_1 E' UGUALE A y SI RESTITUISCA IL VALORE 1
  - ALTRIMENTI SI RESTITUISCA IL VALORE 0

- POICHÉ L'ALGORITMO DATO È EFFETTIVO, PER LA TESI DI CHURCH POSSIAMO CONCLUDERE CHE LA FUNZIONE f È URM-CALCOLABILE

- UNA DIMOSTRAZIONE FORMALE DELLA CALCOLABILITÀ DI f SEGUE DALLA SEGUENTE DEFINIZIONE:

$$f(x,y,t) = \begin{cases} 1 & \text{SE } \pi_1(c_p(x,t)) = 0 \wedge (\pi_2(c_p(x,t)))_1 = y \\ 0 & \text{ALTRIMENTI,} \\ & \text{CIOÈ SE } \neg(\pi_1(c_p(x,t)) = 0 \wedge (\pi_2(c_p(x,t)))_1 = y) \end{cases}$$

ESEMPIO 2

SUPPONIAMO CHE f E g SIANO FUNZIONI UNARIE URM-CALCOLABILI.
ALLORA LA FUNZIONE

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{SE } x \in Dom(f) \cup Dom(g) \\ \text{INDEF.} & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

E' URM-CALCOLABILE.

- SI ESEGUANO IN PARALLELO I PROGRAMMI PER CALCOLARE $f(x)$ E $g(x)$
- NON APPENA IL PRIMO PROGRAMMA SI FERMA, SI INTERROMPA LA SIMULAZIONE E SI RESTITUISCA IL VALORE 1

TALE ALGORITMO CALCOLA EFFETTIVAMENTE LA FUNZIONE h E PERTANTO, PER LA TESI DI CHURCH, h E' URM-CALCOLAB.

ESERCIZI

1. SUPPONENDO CHE f E g SIANO FUNZIONI EFFETTIVAMENTE CALCOLABILI, SI DIMOSTRI MEDIANTE LA TESI DI CHURCH CHE LA FUNZIONE

$$h(x) = \begin{cases} x & \text{SE } x \in Dom(f) \cap Dom(g) \\ \uparrow & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

E' URM- CALCOLABILE

2. SUPPONENDO CHE LA FUNZIONE f SIA UNA FUNZIONE TOTALE EFFETTIVAMENTE CALCOLABILE, SI DIMOSTRI MEDIANTE LA TESI DI CHURCH CHE LA SEGUENTE FUNZIONE E' URM- CALCOLABILE

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{SE } x \in Ran(f) \\ \uparrow & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$