MINIMALIZZAZIONE

- MEDIANTE PROGRAMMI URM E' POSSIBILE EFFETTUARE LA RICERCA DEL PIÙ PICCOLO INDICE PER CUI SI VERIFICA UNA CERTA CONDIZIONE.
  SE TALE INDICE NON ESISTE LA RICERCA PUÒ ANDARE AVANTI ALL'INFINITO.
- LA MINIMALIZZAZIONE (NON LIMITATA) CONSENTE DI DEFINIRE UNA FUNZIONE $g(\vec{x})$ A PARTIRE DA UNA FUNZIONE $f(\vec{x}, y)$ PONENDO

$$g(\vec{x}) =_{def} \text{minimo } y \text{ tale che } f(\vec{x}, y) = 0$$

- SE $f(\vec{x}, y)$ FOSSE CALCOLABILE, UN MODO PER CALCOLARE $g(\vec{x})$ CONSISTE NEL CALCOLARE $f(\vec{x}, 0), f(\vec{x}, 1), f(\vec{x}, 2), \ldots$ FINO A TROVARE IL PRIMO y TALE CHE $f(\vec{x}, y) = 0$
- CHE COSA SUCCEDE SE
  - $f(\vec{x}, y) \neq 0$, PER OGNI y, OPPURE
  - ESISTE z TALE CHE
    - $f(\vec{x}, z)\uparrow$
    - $f(\vec{x}, w) \neq 0$, PER OGNI $w < z$?
- IN ENTRAMBI I CASI CONVENIAMO CHE $g(\vec{x})$ SIA NON DEFINITA

DEFINIZIONE

- DATA UNA FUNZIONE $f(\vec{x}, y)$ (ANCHE PARZIALE) PONIAMO

$$\mu y\left(f(\vec{x}, y) = 0\right) = \begin{cases} \text{MINIMO } y \text{ TALE CHE} \\ \quad \bullet\ f(\vec{x}, z)\downarrow \text{ PER OGNI } z \leq y \\ \quad \bullet\ f(\vec{x}, y) = 0 \\ \quad \text{SE UN SIFFATTO } y \text{ ESISTE} \\ \uparrow \quad \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

- μ E' DETTO OPERATORE DI MINIMALIZZAZIONE ■
- L'INSIEME $\mathcal{C}_{URM}$ E' CHIUSO RISPETTO ALL'OPERAZIONE DI MINIMALIZZAZIONE

TEOREMA

SE $f(\overline{x}, y)$ E' CALCOLABILE, LA FUNZIONE $g(\overline{x}) = \mu y\,(f(\overline{x}, y) = 0)$ E' CALCOLABILE.

DIM SIA $\overline{x} = (x_1, \dots, x_n)$.

SIA F UN PROGRAMMA CHE CALCOLA $f(\overline{x}, y)$

SIA $m = \max(n+1, \rho(F))$.

IL SEGUENTE PROGRAMMA CALCOLA $g(\overline{x})$:

$T(1, m+1)$

$\vdots$

$T(n, m+n)$

I_p: $R_1 \leftarrow f_F(R_{m+1}, \dots, R_{m+n}, R_{m+n+1})$

$J(1, m+n+2, q)$

$S(m+n+1)$

$J(1, 1, p)$

I_q: $T(m+n+1, 1)$ ■

COROLLARIO

SIA $R(\vec{x}, y)$ UN PREDICATO DECIDIBILE.

ALLORA LA FUNZIONE

$$g(\vec{x}) = \mu y\, R(\vec{x}, y) = \begin{cases} \text{MINIMO } y \text{ TALE CHE } R(\vec{x}, y) \text{ E' VERO} \\ \uparrow \quad \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

E' CALCOLABILE.

DIM.

E' SUFFICIENTE OSSERVARE CHE:

$$g(\vec{x}) = \mu y(\overline{sg}(c_R(\vec{x}, y)) = 0). \blacksquare$$

- L'OPERATORE μ CONSENTE DI DERIVARE FUNZIONI NON TOTALI A PARTIRE DA FUNZIONI TOTALI
- SI CONSIDERI IL SEGUENTE ESEMPIO:

SIA $f(x,y) = |x - y^2|$

PONIAMO $g(x) = \mu y\,(f(x,y) = 0)$

SI VERIFICA FACILMENTE CHE:

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{SE } x \text{ E' UN QUADRATO PERFETTO} \\ \uparrow & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

ESERCIZI

(1) SIA $f(x)$ UNA FUNZIONE CALCOLABILE, TOTALE E INIETTIVA.
SI DIMOSTRI CHE ANCHE f^{-1} E' CALCOLABILE

(2) SIA $p(x)$ UN POLINOMIO A COEFFICIENTI IN $\mathbb{Z}$.
SI DIMOSTRI CHE LA FUNZIONE

$$f(z) = \text{"minimo } y \in \mathbb{N} \text{ tale che } p(y) - z = 0\text{"}$$

E' CALCOLABILE

(3) SI DIMOSTRI CHE LA FUNZIONE

$$f(x,y) = \begin{cases} x/y & \text{SE } y \neq 0 \text{ E } y \mid x \\ \uparrow & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

E' CALCOLABILE