“METODI FORMALI DELL’INFORMATICA”
CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
ANNO ACCADEMICO 2002/03

Prova in itinere del modulo di Computabilità (Prof. D. Cantone) – 4/4/03

Tempo a disposizione: 2 ore

Esercizio 1
Dare la definizione di predicato, di predicato decidibile e di predicato parzialmente decidibile.

Soluzione:

- Un predicato è una funzione *totale* definita su $\mathbb{N}^k$ e a valori su $\{\mathbf{true}, \mathbf{false}\}$, con $k \in \mathbb{N}$.
- Un predicato $P : \mathbb{N}^k \to \{\mathbf{true}, \mathbf{false}\}$ si dice *decidibile* se la sua *funzione caratteristica* $c_P : \mathbb{N}^k \to \{0, 1\}$ definita da:

$$c_P(x_1, \ldots, x_k) = \begin{cases} 1 & \text{se } P(x_1, \ldots, x_k) = \mathbf{true} \\ 0 & \text{se } P(x_1, \ldots, x_k) = \mathbf{false} \end{cases}$$

  è *calcolabile.*

- Un predicato $P : \mathbb{N}^k \to \{\mathbf{true}, \mathbf{false}\}$ si dice *parzialmente decidibile* se la sua *funzione caratteristica parziale* $c'_P : \mathbb{N}^k \to \{0, 1\}$ definita da:

$$c'_P(x_1, \ldots, x_k) = \begin{cases} 1 & \text{se } P(x_1, \ldots, x_k) = \mathbf{true} \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

  è *calcolabile.*

Esercizio 2
Esibire cinque esempi di funzioni totali unarie non calcolabili.

Soluzione: A lezione si è dimostrato che la seguente funzione costruita con il metodo diagonale di Cantor è *totale* e *non calcolabile*:

$$f(x) = \begin{cases} \phi_x(x) + 1 & \text{se } \phi_x(x) \downarrow \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

In maniera *completamente* analoga si può dimostrare che ciascuna funzione $f_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definita da

$$f_k(x) = \begin{cases} \phi_x(x) + 1 & \text{se } \phi_x(x) \downarrow \\ k & \text{altrimenti} \end{cases}$$

per $k \geq 1$, è anch’essa *totale* e *non calcolabile.* Ciò dà esplicitamente un’infinità di funzioni *totali* e *non calcolabili.*

Esercizio 3
Si considerino i seguenti predicati

$$P(x, y) \quad = \quad \text{“Con input } y\text{, il programma di codice } x \text{ si ferma calcolando un valore diverso da zero.”}$$

$$Q(x, y) \quad = \quad \text{“Con input } y\text{, il programma di codice } x \text{ non si ferma.”}$$

Stabilire, motivando adeguatamente la risposta, per ciascuno dei predicati

1. $P(x, y)$
2. $Q(x, y)$
3. $P(x, y)$ **and** $Q(x, y)$

se trattasi di predicato:

- decidibile,
- parzialmente decidibile.

Soluzione:

1. Poiché

   - $P(x,y) \ \equiv\ (\exists z)(\exists t)(S_1(x,y,z,t)\ \textbf{and}\ z>0)\,, \qquad \text{per ogni } x,y \in \mathbb{N}$
     (dove $S_1(x,y,z,t)$ è il predicato che è vero se e solo se il programma di codice x su input y calcola il valore z in al più t passi);
   - $S_1(x,y,z,t)$ è decidibile
   - "$z>0$" è decidibile
   - la congiunzione di predicati decidibile è un predicato decidibile
   - il predicato che si ottiene quantificando esistenzialmente un predicato decidibile è parzialmente decidibile

   si ha che $P(x,y)$ **è parzialmente decidibile**.

   Per quanto riguarda la decidibilità, vista la somiglianza del predicato $P(x,y)$ con il problema indecidibile "$y \in W_x$?", possiamo provare a ridurre quest'ultimo al nostro predicato.
   Si consideri la funzione
   $$f(x,y) =_{\text{Def}} \mathbf{1}(\psi_U(x,y))\,.$$
   Chiaramente $f(x,y)$ è calcolabile. Per il teorema **s-m-n** esiste quindi una funzione totale calcolabile $k(x)$ tale che
   $$f(x,y) = \phi_{k(x)}(y)\,, \qquad \text{per ogni } x,y \in \mathbb{N}\,.$$
   Pertanto si ha:
   $$x \in W_y \quad\Longleftrightarrow\quad f(x,y)=1 \quad\Longleftrightarrow\quad \phi_{k(x)}(y)=1 \quad\Longleftrightarrow\quad P(k(x),y)\,,$$
   cioè il problema indecidibile "$y \in W_x$?" è stato ridotto al predicato $P(x,y)$, da cui segue che $P(x,y)$ **non è decidibile**.

   Una dimostrazione più complicata dell'indecidibilità di $P(x,y)$ fa uso del teorema di Rice. Abbiamo però bisogno di *eliminare* una variabile, in quanto il teorema di Rice si applica a funzioni unarie. Possiamo utilizzare uno dei seguenti *trucchi*:

   - introdurre il predicato $R_1(z) =_{\text{Def}} P((z)_1,(z)_2)$, oppure
   - *congelare* la variabile y definendo il predicato $R(x) =_{\text{Def}} P(x,\overline{c})$, dove $\overline{c} \in \mathbb{N}$ è una costante fissata.

   Per semplicità scegliamo la seconda strada. Per dimostrare l'indecidibilità di $P(x,y)$ è sufficiente dimostrare che $R(x)$ è indecidibile, in quanto quest'ultimo può essere immediatamente ridotto a $P(x,y)$ come segue:
   $$R(x) \quad\Longleftrightarrow\quad P(x,\overline{c})\,.$$
   Dimostriamo che $R(x)$ è indecidibile mediante il teorema di Rice. Sia
   $$\mathcal{B} = \{g \in \mathcal{C}_1 \mid \text{ la funzione } g \text{ è definita su } \overline{c} \text{ e } g(\overline{c}) \neq 0\}\,.$$
   Poiché $\emptyset \neq \mathcal{B} \neq \mathcal{C}_1$, per il teorema di Rice il problema "$\phi_x \in \mathcal{B}$?" è indecidibile, cioè il problema
   "$\phi_x(\overline{c})\downarrow$ e $\phi_x(\overline{c}) \neq 0$?"
   è indecidibile. Ma quest'ultimo problema è equivalente al predicato $R(x)$, che pertanto risulta indecidibile, *c.v.d.*

   NOTA BENE: *Diversi studenti si sono limitati ad osservare che dato che un certo predicato è* estensionale *e* non banale *esso è indecidibile (spesso argomentando in maniera non corretta l'estensionalità del predicato). Un approccio che si rifà al teorema di Rice deve essere invece portato avanti come nell'esempio di sopra, esibendo un opportuno insieme $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}_1$, verificandone la non banalità, ecc.*

Soluzione: (continua)

2. Poiché il predicato $Q(x, y)$ è equivalente al problema "$y \notin W_x$?" di cui è *nota* la non parziale decidibilità, si ha subito che $Q(x, y)$ **non è parzialmente decidibile** e, a maggior ragione, **non è decidibile**.

3. Poiché il predicato $P(x, y)$ **and** $Q(x, y)$ assume sempre il valore **false** per ogni $x, y \in \mathbb{N}$, esso risulta banalmente *decidibile.*

   In particolare, ciò dimostra che la congiunzione di due predicati indecidibili può essere un predicato decidibile.