“METODI FORMALI DELL’INFORMATICA”
CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
ANNO ACCADEMICO 2002/03

Esempio di prova in itinere del modulo di Computabilità (Prof. D. Cantone)

La prova in itinere prevista per il 4 aprile 2003 conterrà alcune domande “teoriche” sul programma (es. definizioni, enunciati, o anche qualche semplice dimostrazione). Inoltre ci sarà un esercizio analogo a quelli assegnati nella parte di computabilità degli esami di Metodi Formali dell’Informatica nell’ultimo anno[1] che riguarderà lo studio di predicati o funzioni .

Un ulteriore esempio di esercizio, su cui vi potete esercitare prima di leggerne la soluzione che sarà pubblicata in seguito, è il seguente:

Esercizio 1
Si considerino i seguenti predicati

$G_5(x) =$ “ Il dominio della funzione calcolata dal programma di codice x contiene almeno 5 elementi.”

$L_{10}(x) =$ “ Il dominio della funzione calcolata dal programma di codice x contiene al più 10 elementi.”

Stabilire per ciascuno dei predicati G_5, L_{10} e (G_5 **and** L_{10}) se trattasi di predicato:

- decidibile,
- parzialmente decidibile.

Alcune raccomandazioni (valide anche per le prove di esame)

A meno che non venga esplicitamente detto il contrario, nello svolgimento di un esercizio di calcolabilità si può fare uso di tutti i risultati dimostrati o semplicemente enunciati a lezione (compresi quelli contenuti negli esercizi assegnati durante il corso). I passaggi rimanenti debbono invece essere giustificati adeguatamente. Inoltre, quando ciò non introduce grosse complicazioni, nel dimostrare la calcolabilità di una funzione è preferibile non fare uso della Tesi di Church.

---

[1] Si veda l’URL http://www.dmi.unict.it/~cantone/HomePageMetodi/itMetodi.html per i testi degli esami assegnati nell’A.A. 2001/2002.

Soluzione

Utilizzando la notazione W_x per indicare il dominio della funzione ϕ_x, cioè la funzione calcolata dal programma di codice x, i tre predicati in studio possono essere rappresentati anche mediante i tre problemi "$|W_x| \geq 5$?", "$|W_x| \leq 10$?" e "$5 \leq |W_x| \leq 10$?", rispettivamente.

Faremo vedere che

- il problema "$|W_x| \geq 5$?" è parzialmente decidibile, ma non decidibile;
- i problemi "$|W_x| \leq 10$?" e "$5 \leq |W_x| \leq 10$?" non sono parzialmente decidibili (e quindi non possono neanche essere decidibili, in quanto ogni problema decidibile è parzialmente decidibile).

Parziale decidibilità di "$|W_x| \geq 5$?"

Indicando con $H_1(x, y, t)$ il predicato che esprime che il programma di indice x su input y si ferma in al più t passi, si ha che

$$\text{"}|W_x| \geq 5?\text{"} \equiv (\exists y_1)(\exists y_2)(\exists y_3)(\exists y_4)(\exists y_5)(\exists t)\left(\bigwedge_{i=1}^{5} H_1(x, y_i, t) \wedge \bigwedge_{i<j} y_i < y_j\right),$$

per ogni $x \in \mathbb{N}$.

Sappiamo già che il predicato $H_1(x, y, t)$ è decidibile; inoltre, anche il predicato $x < y$ è decidibile, in quanto $x < y \equiv \mathbf{sg}(y \dot{-} x)$. Pertanto il predicato

$$\bigwedge_{i=1}^{5} H_1(x, y_i, t) \wedge \bigwedge_{i<j} y_i < y_j$$

è decidibile (in quanto la congiunzione di predicati decidibili è un predicato decidibile) e quindi il predicato

$$(\exists y_1)(\exists y_2)(\exists y_3)(\exists y_4)(\exists y_5)(\exists t)\left(\bigwedge_{i=1}^{5} H_1(x, y_i, t) \wedge \bigwedge_{i<j} y_i < y_j\right)$$

è parzialmente decidibile (facendo ricorso ad un risultato visto a lezione che dice che quantificando esistenzialmente un predicato decidibile o parzialmente decidibile si ottiene un predicato parzialmente decidibile).

Pertanto il problema "$|W_x| \geq 5$?" è parzialmente decidibile.

Osservazione. *Una dimostrazione alternativa della parziale decidibilità di "$|W_x| \geq 5$?" consiste nel verificare mediante la Tesi di Church che la funzione caratteristica parziale del predicato "$|W_x| \geq 5$" è calcolabile. Ciò può essere fatto descrivendo come si possa simulare l'esecuzione in parallelo delle computazioni del programma P_x di codice x su tutti i possibili input $0, 1, 2, \ldots$ che termini non appena 5 computazioni diverse di P_x si fermano, se mai ciò accade.*

Indecidibilità di "$|W_x| \geq 5$?"

Sappiamo che il problema "$W_x = \emptyset$?" è indecidibile. Pertanto anche il problema "$W_x \neq \emptyset$?" è indecidibile (in quanto la decidibilità di quest'ultimo implicherebbe la decidibilità della sua negazione e quindi di "$W_x = \emptyset$?").

Dimostriamo l'indecidibilità di "$|W_x| \geq 5$?" facendo vedere che il problema indecidibile "$W_x \neq \emptyset$?" può essere ridotto a "$|W_x| \geq 5$?".

Si consideri la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq y \leq 3 \\ \phi_x(y-4) & \text{se } y \geq 4\,. \end{cases}$$

Mediante la Tesi di Church si ha subito la calcolabilità di $f(x, y)$; pertanto, per il teorema di parametrizzazione, esiste una funzione totale calcolabile $k(x)$ tale che

$$f(x, y) = \phi_{k(x)}(y)\,,$$

per ogni $x, y \in \mathbb{N}$.

Poiché per ogni $x \in \mathbb{N}$ vale

$$W_x \neq \emptyset \leftrightarrow |W_{k(x)}| \geq 5\,,$$

ne segue che il problema indecidibile "$W_x \neq \emptyset$?" è riducibile al problema "$|W_x| \geq 5$?", da cui l'indecidibilità anche di quest'ultimo.

Non parziale decidibilità di "$|W_x| \leq 10$?" e "$5 \leq |W_x| \leq 10$?"

Per dimostrare che il problema "$|W_x| \leq 10$?" non è parzialmente decidibile, procederemo mediante la riduzione del problema "$W_x = \emptyset$?". Si osservi che poiché sappiamo che "$W_x = \emptyset$?" è indecidibile e "$W_x \neq \emptyset$?" è parzialmente decidibile, si ha che il problema "$W_x = \emptyset$?" non è parzialmente decidibile.

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq y \leq 9 \\ \phi_x(y-9) & \text{se } y \geq 10\,. \end{cases}$$

Mediante la Tesi di Church si ha subito la calcolabilità di $f(x,y)$; pertanto, per il teorema di parametrizzazione, esiste una funzione totale calcolabile $k(x)$ tale che

$$f(x,y) = \phi_{k(x)}(y)\,,$$

per ogni $x, y \in \mathbb{N}$.

Poiché per ogni $x \in \mathbb{N}$ vale

$$W_x = \emptyset \leftrightarrow |W_{k(x)}| \leq 10\,,$$

ne segue che il problema non parzialmente decidibile "$W_x = \emptyset$?" è riducibile al problema "$|W_x| \geq 10$?", da cui la non parziale decidibilità anche di quest'ultimo.

Si osservi che vale pure

$$W_x = \emptyset \leftrightarrow 5 \leq |W_{k(x)}| \leq 10\,,$$

da cui anche la non parziale decidibilità del problema "$5 \leq |W_x| \leq 10$?".

Osservazione. *La stessa conclusione può essere anche raggiunta utilizzando il teorema di Rice-Shapiro (di cui a lezione è stato dato solo l'enunciato).*
Sia $\mathcal{A} =_{Def} \{\phi_x \mid 5 \leq |W_{k(x)}| \leq 10,\ x \in \mathbb{N}\}$. *Se per assurdo il problema "$5 \leq |W_x| \leq 10$?" fosse parzialmente decidibile, allora l'insieme* $\{x \mid \phi_x \in \mathcal{A}\} = \{x \mid 5 \leq |W_{k(x)}| \leq 10,\ x \in \mathbb{N}\}$ *sarebbe ricorsivamente enumerabile e quindi, per il teorema di Rice-Shapiro, si avrebbe*

$$g \in \mathcal{A} \leftrightarrow \text{ esiste una funzione finita } \theta \in \mathcal{A} \text{ tale che } \theta \subseteq g\,, \tag{1}$$

per ogni funzione calcolabile unaria g.
Sia $\mathbf{t}$ una funzione totale, calcolabile e unaria e sia $\mathbf{t}'$ la funzione parziale definita da

$$\mathbf{t}'(x) = \begin{cases} \mathbf{t}(x) & \text{se } 0 \leq y \leq 9 \\ \uparrow & \text{se } y \geq 10\,. \end{cases}$$

Poiché $\mathbf{t}' \in \mathcal{A}$ e $\mathbf{t}' \subseteq \mathbf{t}$, la condizione (1) implicherebbe che $\mathbf{t} \in \mathcal{A}$, il che è assurdo, in quanto la funzione $\mathbf{t}$ è totale, mentre l'insieme $\mathcal{A}$ contiene soltanto funzioni il cui dominio ha al più 10 elementi. Pertanto il problema "$5 \leq |W_x| \leq 10$?" non può essere parzialmente decidibile.
In maniera del tutto analoga si può dimostrare che anche il problema "$|W_x| \leq 10$?" non è parzialmente decidibile.