"METODI FORMALI DELL'INFORMATICA"

CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA

ANNO ACCADEMICO 2002/03

I appello sessione invernale - 28 Gennaio 2004

NOTA BENE: I Sigg. studenti sono invitati ad utilizzare un diverso foglio protocollo secondo le indicazioni date sotto.

ESERCIZIO 1 (FOGLIO A)

Dopo aver definito che cosa si intende per "problema indecidibile" e "problema non parzialmente decidibile", si enuncino con precisione almeno cinque problemi indecidibili e tre problemi non parzialmente decidibili.

Soluzione:

- Un problema $M(\vec{x})$ è *indecidibile* se la sua funzione caratteristica

$$c_M(\vec{x}) = \begin{cases} 1 & \text{se } M(\vec{x}) \text{ è vero} \\ 0 & \text{se } M(\vec{x}) \text{ è faslo} \end{cases}$$

  non è calcolabile.

- Un problema $M(\vec{x})$ è *non parzialmente decidibile* se la sua funzione caratteristica parziale

$$c_M(\vec{x}) = \begin{cases} 1 & \text{se } M(\vec{x}) \text{ è vero} \\ \uparrow & \text{se } M(\vec{x}) \text{ è faslo} \end{cases}$$

  non è calcolabile.

Esempi di problemi indecidibili:

- "$x \in W_x$"
- "$\phi_x(y)\downarrow$"
- "la funzione ϕ_x è identicamente nulla"
- "$\phi_x = \phi_y$"
- "$c \in W_x$" (per ogni $c \in \mathbb{N}$)
- "$c \in E_x$" (per ogni $c \in \mathbb{N}$)

Esempi di problemi non parzialmente decidibili:

- "$x \notin W_x$"
- "la funzione ϕ_x è totale"
- "la funzione ϕ_x non è totale"

ESERCIZIO 2 (FOGLIO A)

Si studi la decidibilità e la parziale decidibilità del predicato

$$P(x, y) \quad = \quad \text{“Su input } y \text{ il programma di codice } x \text{ si ferma e calcola il valore } y\text{”}$$

Soluzione:

PARZIALE DECIDIBILITÀ

Si ha:

$$P(x, y) \iff (\exists t)\mathbf{S}_1(x, y, y, t)$$

dove

- $\mathbf{S}_1(x, y, z, t)$ è il predicato che è vero se e solo se il programma di codice x su input y calcola il valore z in al più t passi.

Pertanto, poiché

- il predicato $\mathbf{S}_1(x, y, y, t)$ è primitivo ricorsivo (e quindi decidibile),
- quantificando esistenzialmente un predicato decidibile si ottiene un predicato *parzialmente* decidibile,

segue immediatamente che il predicato $P(x, y)$ è parzialmente decidibile.

DECIDIBILITÀ

I soluzione (Teorema di Rice)

Per dimostrare l'indecibilità di $P(x, y)$ è sufficiente dimostrare che il predicato unario $P(x, 0)$ è indecidibile. Si consideri l'insieme di funzioni calcolabili unarie

$$\mathcal{B} =_{\text{def}} \{g \in \mathcal{C}_1 \mid g(0) = 0\}.$$

Si osservi che vale

$$P(x, 0) \iff \phi_x \in \mathcal{B},$$

e pertanto per dimostrare l'indecidibilità del predicato $P(x, 0)$ sarà sufficiente verificare che il problema “$\phi_x \in \mathcal{B}$?” è indecidibile. Per il Teorema di Rice basterà allora verificare che $\mathcal{B} \neq \emptyset$ e $\mathcal{B} \neq \mathcal{C}_1$.
Si osservi che la funzione unaria costante identicamente uguale a 0 è calcolabile e appartiene a $\mathcal{B}$: pertanto $\mathcal{B} \neq \emptyset$. Inoltre la funzione calcolabile $f_\emptyset$ avente dominio vuoto non appartiene a $\mathcal{B}$: pertanto $\mathcal{B} \neq \mathcal{C}_1$.
Quindi, per il Teorema di Rice, si ha l'indecidibilità di $P(x, 0)$ da cui segue immediatamente l'indecidibilità di $P(x, y)$.

II soluzione (riduzione)

Facciamo vedere come ridurre il problema indecidibile “$x \in W_x$” al predicato $P(x, y)$.
Si consideri la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} y & \text{se } x \in W_x \\ \uparrow & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Per la tesi di Church, la funzione $f(x, y)$ è calcolabile; quindi, per il teorema di parametrizzazione, esiste una funzione totale calcolabile $k(x)$ tale che

$$f(x, y) = \phi_{k(x)}(y),$$

per ogni $x, y \in \mathbb{N}$.
Per ogni $y \in \mathbb{N}$ si ha

$$x \in W_x \iff f(x, y) = y \iff \phi_{k(x)}(y) = y \iff P(k(x), y),$$

da cui segue l'indecidibilità del predicato $P(x, y)$.

Modulo II: Semantica e Complessità (Dott. P. Ursino)

ESERCIZIO 3 (FOGLIO B)

Relativamente al linguaggio tipo "while" denominato L_2 definire le nozioni di:

a) programma ben formato;

b) configurazione per una base B ed una interpretazione I;

c) relazione di transizione;

d) sequenza di computazione;

e) funzione significato.

ESERCIZIO 4

2.a Provare che *CLIQUE* è NP-completo.

2.b Un grafo non direzionato e pesato è un grafo $G = \{V, E\}$ cui sia stato attribuito ad ogni arco $e \in E$ un numero intero positivo o nullo (detto peso), ove cioè sia stata definita una funzione $f : E \rightarrow \mathbb{N}$.

Provare che

UHAMPATHWEIGHT1 $= \{\langle G, s, t, B\rangle \mid G$ grafo finito non direzionato pesato avente un cammino tra s e t che attraversa tutti i nodi la cui somma dei pesi degli archi sia minore o uguale a B, con B numero intero$\}$

è NP-completo.