“METODI FORMALI DELL’INFORMATICA”

CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA

ANNO ACCADEMICO 2002/03

II appello sessione autunnale - 11 Dicembre 2003

NOTA BENE: I Sigg. studenti sono invitati ad utilizzare un diverso foglio protocollo secondo le indicazioni date sotto.

Modulo I: Computabilità (Prof. D. Cantone)

ESERCIZIO 1 (FOGLIO A)

Si enunci il teorema di parametrizzazione nella sua forma più generale.

Soluzione:
Teorema di parametrizzazione (forma generale):
Dati $m, n \geq 1$, esiste una funzione *totale* e *calcolabile* $S_n^m(z, \vec{x})$ di arietà $(m+1)$ tale che

$$\Phi_z^{(m+n)}(\vec{x}, \vec{y}) = \Phi_{S_n^m(z,\vec{x})}^{(n)}(\vec{y}),$$

con $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ e $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n)$.

ESERCIZIO 2 (FOGLIO A)

Si studi la decidibilità e la parziale decidibilità dei predicati

$$P(x_1, y_1, x_2, y_2) = \text{“Su input } y_1 \text{ il programma di codice } x_1 \text{ si ferma \textit{se e solo se} su input } y_2 \text{ il programma di codice } x_2 \text{ non si ferma.”}$$

$$Q(x, y) = P(x, y, x, y)$$

Soluzione:
STUDIO DEL PREDICATO $P(x_1, y_1, x_2, y_2)$
In simboli, si ha:

$$P(x_1, y_1, x_2, y_2) = \phi_{x_1}(y_1)\downarrow \Leftrightarrow \phi_{x_2}(y_2)\uparrow .$$

Sia $\overline{x}_1$ il codice di un programma URM che calcola una funzione totale (ad esempio, la funzione costante nulla) e sia $\overline{y}_1$ un intero qualsiasi fissato. Sia $R(x_2, y_2)$ il predicato $P(\overline{x}_1, \overline{y}_1, x_2, y_2)$. Per dimostrare che il predicato $P(x_1, y_1, x_2, y_2)$ non è parzialmente decidibile è sufficiente dimostrare che $R(x_2, y_2)$ non è parzialmente decidibile.
Si osservi che per definizione

$$R(x_2, y_2) \iff P(\overline{x}_1, \overline{y}_1, x_2, y_2) \iff (\phi_{\overline{x}_1}(\overline{y}_1)\downarrow \Leftrightarrow \phi_{x_2}(y_2)\uparrow)$$

e poiché $\phi_{\overline{x}_1}(\overline{y}_1)\downarrow$ è vero per costruzione, si ha:

$$R(x_2, y_2) \iff \phi_{x_2}(y_2)\uparrow .$$

Inoltre, poiché sappiamo che:

- il problema $\phi_x(y)\downarrow$ è parzialmente decidibile, ma non decidibile;
- un predicato $M(\vec{x})$ è decidibile se e solo se sia $M(\vec{x})$ che **not** $M(\vec{x})$ sono parzialmente decidibili;

ne segue che il problema $\phi_x(y)\uparrow$ **non** è parzialmente decidibile (altrimenti il problema $\phi_x(y)\downarrow$ sarebbe decidibile). Pertanto, il predicato $R(x_2, y_2)$ **non** è parzialmente decidibile e quindi anche il predicato $P(x_1, y_1, x_2, y_2)$ **non** è parzialmente decidibile.

Soluzione: (continua)
STUDIO DEL PREDICATO $Q(x,y)$
Si osservi che si ha
$$Q(x,y) \quad \Longleftrightarrow \quad P(x,y,x,y) \quad \Longleftrightarrow \quad (\phi_x(y)\downarrow \Leftrightarrow \phi_x(y)\uparrow)\,.$$
Pertanto il predicato $Q(x,y)$ è sempre **falso**. Quindi ha un funzione caratteristica costante (che vale sempre 0) banalmente calcolabile, da cui segue la **decidibilità** di $Q(x,y)$.

Modulo II: Semantica e Complessità (Dott. P. Ursino)

ESERCIZIO 3 (FOGLIO B)

Sia dato il seguente programma ricorsivo S:
$$F(x) \Leftarrow \ \textbf{if} \ \ x \leq 0 \ \ \textbf{then} \ \ 1 \ \ \textbf{else} \ \ \left(\frac{x}{x+1}\right)^{(-1)^x} F(x-1)\,,$$
ove x sia un numero intero.
Sia $\Phi(S)$ l'operatore semantico ad esso associato e sia $f^i = \Phi(S)^i(\perp)$ la sua i-esima iterazione.

1.a) Calcolare per induzione le funzioni f^i al variare di i.

1.b) Trovare una funzione f tale che per ogni i si abbia $f^i \sqsubseteq_\omega f$, con $\sqsubseteq_\omega$ ordine di progressiva determinazione per funzioni definito durante le lezioni di semantica.

ESERCIZIO 4 (FOGLIO B)

2.a Provare che 3-*COLOR* è NP-completo.

2.b Un grafo non direzionato *pesato* è un grafo $G = (V,E)$ cui sia stato attribuito ad ogni arco $e \in E$ un numero intero positivo o nullo $f(e) \in \mathbb{N}$ (detto peso), ove cioè sia stata definita una funzione $f : E \to \mathbb{N}$.

Provare che

UHAMPATHWEIGHT = $\{< G, s, t, B >|$ G grafo finito non direzionato pesato avente un cammino hamiltoniano tra s e t la cui somma dei pesi degli archi non superi il numero intero B $\}$

è NP-completo.