"METODI FORMALI DELL'INFORMATICA"

CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA

ANNO ACCADEMICO 2002/03

I appello sessione autunnale - 22 Settembre 2003

NOTA BENE: I Sigg. studenti sono invitati ad utilizzare un diverso foglio protocollo secondo le indicazioni date sotto.

Modulo I: Computabilità (Prof. D. Cantone)

ESERCIZIO 1 (FOGLIO A)

Si enunci il primo teorema della forma normale di Kleene.

Soluzione:
Primo teorema della forma normale di Kleene: Esistono una funzione calcolabile $U(x)$ e, per ogni $n \geq 1$, un predicato decidibile $T_n(e, \vec{x}, z)$ tali che:

(a) $\phi_e^{(n)}(\vec{x})\downarrow$ se e solo se $(\exists z)T_n(e, \vec{x}, z)$

(b) $\phi_e^{(n)}(\vec{x}) = U(\mu z\, T_n(e, \vec{x}, z))$.

ESERCIZIO 2 (FOGLIO A)

Si studi la decidibilità e la parziale decidibilità del predicato

$P(x)$ = "Per qualche y e per qualche z si ha:
(a) il programma di codice y con input il valore y calcola il valore z;
(b) il programma di codice x con input il valore z si ferma."

Soluzione:
PARZIALE DECIDIBILITÀ
Si ha:

$$P(x) \iff (\exists y)(\exists z)(\phi_y(y) = z \wedge \phi_x(z)\downarrow) \iff (\exists y)(\exists z)(\exists t)(\mathbf{S}_1(y, y, z, t) \wedge \mathbf{H}_1(x, z, t)),$$

dove

- $\mathbf{H}_1(x, y, t)$ è il predicato che è vero se e solo se il programma di codice x su input y si ferma in al più t passi;
- $\mathbf{S}_1(x, y, z, t)$ è il predicato che è vero se e solo se il programma di codice x su input y calcola il valore z in al più t passi.

Pertanto, poiché

- i predicati $\mathbf{S}_1(y, y, z, t)$ e $\mathbf{H}_1(x, z, t)$ sono primitivi ricorsivi (e quindi decidibili),
- la congiunzione di predicati decidibili è un predicato decidibile,
- quantificando esistenzialmente un predicato decidibile si ottiene un predicato *parzialmente* decidibile,

segue immediatamente che il predicato $P(x)$ è parzialmente decidibile.

Soluzione: (continua)

DECIDIBILITÀ

I soluzione (Teorema di Rice)

Si consideri l'insieme di funzioni calcolabili unarie

$$\mathcal{B} =_{\text{def}} \{g \in \mathcal{C}_1 \mid g(z)\downarrow \text{ e } \phi_y(y) = z\,,\ \text{per qualche } y, z \in \mathbb{N}\}\,.$$

Si osservi che vale

$$P(x) \iff \phi_x \in \mathcal{B}\,,$$

e pertanto per dimostrare l'indecidibilità del predicato $P(x)$ sarà sufficiente verificare che il problema "$\phi_x \in \mathcal{B}$?" è indecidibile. Per il Teorema di Rice basterà allora verificare che $\mathcal{B} \neq \emptyset$ e $\mathcal{B} \neq \mathcal{C}_1$.
Si osservi che ogni funzione unaria totale calcolabile appartiene a $\mathcal{B}$: pertanto $\mathcal{B} \neq \emptyset$. Inoltre la funzione calcolabile $f_\emptyset$ avente dominio vuoto non appartiene a $\mathcal{B}$: pertanto $\mathcal{B} \neq \mathcal{C}_1$.
Quindi, per il Teorema di Rice, si ha l'indecidibilità di $P(x)$.

II soluzione (riduzione)

Facciamo vedere come ridurre il problema indecidibile "$x \in W_x$" al predicato $P(x)$.
Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} y & \text{se } x \in W_x \\ \uparrow & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Per la tesi di Church, la funzione $f(x,y)$ è calcolabile; quindi, per il teorema di parametrizzazione, esiste una funzione totale calcolabile $k(x)$ tale che

$$f(x,y) = \phi_{k(x)}(y)\,,$$

per ogni $x, y \in \mathbb{N}$.
Si osservi che

$$(\forall w, w')(\phi_{k(x)}(w)\downarrow \iff \phi_{k(x)}(w')\downarrow)\,. \tag{1}$$

Sia y_0 un indice della funzione identicamente nulla (cioè $\phi_{y_0}(w) = 0$, per ogni $w \in \mathbb{N}$). Si ha

$$x \in W_x \iff f(x,0) = 0 \iff \phi_{k(x)}(0) = 0\,. \tag{2}$$

Inoltre

(3) $\phi_{k(x)}(0) = 0 \implies \phi_{y_0}(y_0) = 0 \wedge \phi_{k(x)}(0)\downarrow \implies (\exists y)(\exists z)(\phi_y(y) = z \wedge \phi_{k(x)}(z)\downarrow) \implies P(k(x))$

(4) $P(k(x)) \implies (\exists y)(\exists z)(\phi_y(y) = z \wedge \phi_{k(x)}(z)\downarrow) \implies \phi_{y_1}(y_1) = z_1 \wedge \phi_{k(x)}(z_1)\downarrow$ (per qualche $y_1, z_1 \in \mathbb{N}$) $\implies \phi_{k(x)}(0)\downarrow$ (per la (1)) $\implies \phi_{k(x)}(0) = 0$ (per definizione)

Unendo (3) e (4) si ha:

$$\phi_{k(x)}(0) = 0 \iff P(k(x))$$

e pertanto per la (2) si ottiene:

$$x \in W_x \iff P(k(x))\,,$$

da cui segue l'indecidibilità del predicato $P(x)$.

Modulo II: Semantica e Complessità (Dott. P. Ursino)

ESERCIZIO 3 (FOGLIO B)

Sia dato il seguente programma ricorsivo S:

$$F(n) \Leftarrow \ \textbf{if} \ \ x < 1 \ \ \textbf{then} \ \ 1 \ \ \textbf{else} \ \ x^{((-1)^x)} F(x-1)$$

Sia $\Phi(S)$ l'operatore semantico ad esso associato e sia $f^i = \Phi(S)^i(\perp)$ la sua i-esima iterazione.

(1.a) Calcolare per induzione le funzioni f^i al variare di i.

(1.b) Trovare una funzione f tale che per ogni i $f^i \sqsubseteq_\omega f$, con $\sqsubseteq_\omega$ ordine di progressiva determinazione per funzioni definito durante le lezioni di semantica.

ESERCIZIO 4 (FOGLIO B)

(2.a) Provare che

$$UHAMPATH = \{\langle G, s, t\rangle \mid \ G \text{ grafo finito non direzionato avente un cammino hamiltoniano tra } s \text{ e } t \ \}$$

è NP-completo.

(2.b) Provare che

$$SQUARE \ = \ \{\langle G\rangle \mid G \text{ grafo finito non direzionato tale che ai suoi nodi possono essere assegnati i pesi 1,2,3 in modo che il prodotto di due nodi adiacenti non sia mai un quadrato } \}$$

è NP-completo.