“METODI FORMALI DELL’INFORMATICA”
CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
ANNO ACCADEMICO 2002/03

II appello sessione estiva - 8 Luglio 2003

NOTA BENE: I Sigg. studenti sono invitati ad utilizzare un diverso foglio protocollo secondo le indicazioni date sotto.

Modulo I: Computabilità (Prof. D. Cantone)

ESERCIZIO 1 (FOGLIO A)

Definire la classe delle funzioni primitive ricorsive e dimostrare che la funzione $f(x, y) = x + y$ è primitiva ricorsiva in base alla definizione data.

Soluzione:
Definizione: La classe delle funzioni primitive ricorsive è la più piccola classe di funzioni che contiene le funzioni iniziali $\mathbf{0}$, $x + 1$, U_i^n ed è chiusa rispetto alle operazioni di sostituzione e ricorsione.

Per dimostrare che la funzione $f(x, y) = x+y$ è primitiva ricorsiva è sufficiente osservare che essa è definibile mediante la seguente ricorsione:

$$\begin{cases} f(x,0) = \mathrm{U}_1^1(x) \quad (= x) \\ f(x, y+1) = f(x, y) + 1\,. \end{cases}$$

ESERCIZIO 2 (FOGLIO A)

Si studi la decidibilità e la parziale decidibilità del predicato

$$P_c(x) \quad = \quad \text{“Con input } c \cdot x\text{, il programma di codice } x \text{ si ferma.”}$$

per almeno due valori distinti del parametro $c \in \mathbb{N}$.

Soluzione:
PARZIALE DECIDIBILITÀ
Si osservi che per ogni $c \in \mathbb{N}$ si ha:

$$P_c(x) \iff (\exists t)\mathbf{H}_1(x, cx, t)\,,$$

dove $\mathbf{H}_1(x, y, t)$ è il predicato che è vero se e solo se il programma di codice x su input y si ferma in al più t passi. Pertanto, poiché

- $\mathbf{H}_1(x, y, t)$ è decidibile
- il predicato che si ottiene quantificando esistenzialmente un predicato decidibile è parzialmente decidibile

si ha che il predicato $P_c(x)$ è parzialmente decidibile per ogni $c \in \mathbb{N}$.

DECIDIBILITÀ

$\boldsymbol{c = 0}$. Poiché

$$P_0(x) \iff 0 \in W_x\,,$$

l’indecidilità del predicato $P_0(x)$ segue immediatamente dalla nota indecidibilità del problema “$0 \in W_x$”.

Soluzione: (continua)

Alternativamente, si può procedere direttamente con il teorema di Rice. Si osservi che

$$P_0(x) \quad = \quad \text{“Con input 0, il programma di codice } x \text{ si ferma.”}$$

Si consideri l'insieme di funzioni $\mathcal{B} = \{f \in \mathcal{C}_1 \mid f \text{ è definita in } 0\}$. Si osservi che

- $\mathcal{B} \neq \emptyset$ (infatti, la funzione calcolabile $\mathbf{0}$ sta in $\mathcal{B}$);
- $\mathcal{B} \neq \mathcal{C}_1$ (infatti, la funzione calcolabile mai definita non sta in $\mathcal{B}$).

Pertanto, per il teorema di Rice, il problema $\phi_x \in \mathcal{B}$ è indecidibile e poiché vale

$$P_0(x) \iff \phi_x \in \mathcal{B}$$

si ha l'indecidibilità del predicato $P_0(x)$.

***c* = 1.** Poiché

$$P_1(x) \iff x \in W_x\,,$$

l'indecidilità del predicato $P_1(x)$ segue immediatamente dalla nota indecidibilità del problema “$x \in W_x$”.

$c \in \mathbb{N}$. Più in generale, si può dimostrare l'indecidibilità del predicato $P_c(x)$, per ogni $c \in \mathbb{N}$, mediante la seguente riduzione. Sia

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in W_x \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Per la tesi di Church, la funzione $f(x,y)$ è calcolabile e quindi, per il teorema di parametrizzazione, esiste una funzione unaria totale calcolabile $k(x)$ tale che $f(x,y) = \phi_{k(x)}(y)$, per ogni $x, y \in \mathbb{N}$. Pertanto si ha:

$$x \in W_x \quad\iff\quad f(x, ck(x))\downarrow \quad\iff\quad \phi_{k(x)}(ck(x))\downarrow \quad\iff\quad P_c(k(x))\,,$$

da cui l'indecidibilità del predicato $P_c(x)$.

$c \geq 1$. Se $c \geq 1$ si può dimostrare l'indecidibilità del predicato $P_c(x)$ anche mediante la seguente generalizzazione della dimostrazione dell'indecidibilità del problema “$x \in W_x$”.

Se $P_c(x)$ fosse decidibile, allora la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } \phi_{\lfloor \frac{x}{c} \rfloor}(c\lfloor \frac{x}{c} \rfloor)\uparrow \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

sarebbe calcolabile per la tesi di Church. Quindi esisterebbe $z \in \mathbb{N}$ tale che $f = \phi_z$ e si avrebbe

$$\phi_z(cz)\downarrow \iff f(cz)\downarrow \iff \phi_{\lfloor \frac{cz}{c} \rfloor}\left(c\left\lfloor \frac{cz}{c} \right\rfloor\right)\uparrow \iff \phi_z(cz)\uparrow\,,$$

il che è una contraddizione. Pertanto $P_c(x)$ è indecidibile per ogni $c \geq 1$.

Modulo II: Semantica e Complessità (Dott. P. Ursino)

ESERCIZIO 3 (FOGLIO B)

Sia dato il seguente programma ricorsivo S:

$$F(n) \Leftarrow \ \mathbf{if} \ \ n = 0 \ \ \mathbf{then} \ \ 0 \ \ \mathbf{else} \ \ (-1)^n \cdot n + F(n-1)$$

con $n \geq 0$.
Sia $\Phi(S)$ l'operatore semantico ad esso associato e sia $f^i = \Phi(S)^i(\perp)$ la sua i-esima iterazione.

1.a) Calcolare per induzione le funzioni f^i al variare di i.

1.b) Trovare una funzione f tale che per ogni i $f^i \sqsubseteq_\omega f$, con $\sqsubseteq_\omega$ ordine di progressiva determinazione per funzioni definito durante le lezioni di semantica.

ESERCIZIO 4 (FOGLIO B)

2.a Dare la definizione di complessità spaziale.

2.b Fornire enunciato e dimostrazione del Teorema di Savitch.