“METODI FORMALI DELL’INFORMATICA”
CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
ANNO ACCADEMICO 2002/03

I appello sessione estiva - 9 Giugno 2003

NOTA BENE: I Sigg. studenti sono invitati ad utilizzare un diverso foglio protocollo secondo le indicazioni date sotto.

Modulo I: Computabilità (Prof. D. Cantone)

ESERCIZIO 1 (FOGLIO A)

Definire l’operatore di minimalizzazione ed enunciare almeno un teorema in cui esso interviene.

ESERCIZIO 2 (FOGLIO A)

Stabilire, motivando adeguatamente la risposta, se il seguente predicato

$$P(x) \quad = \quad \text{“Con input } x\text{, il programma di codice } x \text{ si ferma calcolando il valore } x\text{.”}$$

è:

- decidibile,
- parzialmente decidibile.

Soluzione:

Decidibilità. Dimostreremo che $P(x)$ non è decidibile in due modi diversi: mediante diagonalizzazione e mediante riduzione.

(Diagonalizzazione) Supponiamo per assurdo che $P(x)$ sia decidibile. Allora la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} \phi_x(x) + 1 & \text{se } P(x) \\ x & \text{altrimenti} \end{cases}$$

è calcolabile. Sia c il codice di un programma URM che calcoli la funzione $f(x)$. Abbiamo:

$$\begin{array}{rcl} P(c) & \Longrightarrow & \phi_c(c) = f(c) = \phi_c(c) + 1 \\ \textbf{not } P(c) & \Longrightarrow & \phi_c(c) = f(c) = c \quad \Longrightarrow \quad P(c)\,. \end{array}$$

In entrambi i casi si ha un assurdo, da cui segue che l’ipotesi di partenza che $P(x)$ fosse decidibile è contraddittoria, cioè $P(x)$ è indecidibile.

(Riduzione) Facciamo vedere come ridurre il problema indecidibile “$x \in W_x$” al problema $P(x)$.

Si consideri la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} y & \text{se } x \in W_x \\ \uparrow & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Per la tesi di Church, la funzione $f(x, y)$ è calcolabile; quindi, per il teorema di parametrizzazione, esiste una funzione totale calcolabile $k(x)$ tale che

$$f(x, y) = \phi_{k(x)}(y)\,,$$

per ogni $x, y \in \mathbb{N}$. Poiché

$$\begin{array}{rcl} x \in W_x & \Longleftrightarrow & f(x, k(x)) = k(x) \\ & \Longleftrightarrow & \phi_{k(x)}(k(x)) = k(x) \quad \Longleftrightarrow \quad P(k(x))\,, \end{array}$$

si ha l’indecidibilità di $P(x)$.

Soluzione: (continua)

Parziale decidibilità. Poiché

- $P(x) \;\equiv\; (\exists t) S_1(x,x,x,t)\,, \qquad$ per ogni $x \in \mathbb{N}$
  (dove $S_1(x,y,z,t)$ è il predicato che è vero se e solo se il programma di codice x su input y calcola il valore z in al più t passi)
- $S_1(x,y,z,t)$ è decidibile
- il predicato che si ottiene quantificando esistenzialmente un predicato decidibile è parzialmente decidibile

si ha che $P(x)$ **è parzialmente decidibile**.

Modulo II: Semantica e Complessità (Dott. P. Ursino)

ESERCIZIO 3 (FOGLIO B)

Assumendo il seguente risultato:

Theorem 1 *Sia S il programma ricorsivo che consta della sola funzione ricorsiva*

$$F(x) \Leftarrow t$$

Sia $I = (D, I_0)$ una appropriata interpretazione e

$$u_0, u_1 \ldots$$

una computazione su input d. Allora per ogni indice i per cui u_i esiste e per ogni assegnamento γ:

$$I(u_i)(\gamma) = \Phi_I(S)^i(\gamma(F))(d)\,.$$

Dare la definizione di semantica denotazionale e operazionale in $\mathcal{L}_3$ nella versione limitata ai programmi che constano di una sola funzione ricorsiva ad una sola variabile e provarne la coincidenza.

ESERCIZIO 4 (FOGLIO B)

(1) Provare che *CLIQUE* è NP-completo.

(2) Definiamo i due seguenti linguaggi:

$$\begin{array}{rcl} \mathit{UHamiltonian} & = & \{\langle G\rangle \mid G \text{ grafo finito non direzionato avente un cammino hamiltoniano } \} \\ \mathit{UHamiltonianCircuit} & = & \{\langle G\rangle \mid G \text{ grafo finito non direzionato avente un ciclo hamiltoniano } \} \end{array}$$

ove con “ciclo hamiltoniano” si intende un cammino hamiltoniano che abbia un arco tra il primo e l’ultimo vertice.

Provare che *UHamiltonian* è riducibile polinomialmente a *UHamiltonianCircuit*.