BREVI CENNI SULLA TEORIA DEGLI INSIEMI

CON INSIEME INTENDIAMO OGNI RIUNIONE M IN UN TUTTO DI OGGETTI m (CHE VENGONO DETTI ELEMENTI DI M) DELLA NOSTRA INTUIZIONE O DEL NOSTRO PENSIERO [CANTOR, 1895]

DA TALE DEFINIZIONE DISCENDONO LE SEGUENTI PROPRIETÀ:

- OGNI INSIEME M HA ELEMENTI O MEMBRI $(m \in M)$
- UN INSIEME È DETERMINATO DAI SUOI ELEMENTI (PROPRIETÀ DI ESTENSIONALITÀ)

$$A = B \iff (\forall x)(x \in A \iff x \in B)$$

NELLA TEORIA CANTORIANA DEGLI INSIEMI, TROVIAMO LE SEGUENTI NOZIONI:

- INSIEME VUOTO: $\emptyset$ (UNICO PER L'ESTENSIONALITÀ)
- $A \subseteq B \iff (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B)$ (SOTTOINSIEME)

PROPRIETÀ
- PER OGNI B:
  $\emptyset \subseteq B$, $B \subseteq B$
- $A = B \iff [A \subseteq B \wedge B \subseteq A]$

- $A \subsetneq B \iff [A \subseteq B \wedge A \neq B]$ (SOTTOINSIEME PROPRIO)
- $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \iff (\forall x)(x \in A \iff (x = a_1 \vee x = a_2 \vee \dots \vee x = a_n))$
- $A = \{x \mid P(x)\} \iff (\forall x)(x \in A \iff P(x))$
  (PRINCIPIO DI COMPRENSIONE)

- $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ (UNIONE)
- $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ (INTERSEZIONE)
- $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$ (DIFFERENZA)
- $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = \{x \mid (\exists n \in \mathbb{N})(x \in A_n)\}$
- $\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n = \{x \mid (\forall n \in \mathbb{N})(x \in A_n)\}$
- $f : X \to Y$ (FUNZIONE DA X IN Y)
- $f : X \rightarrowtail Y$ (INIEZIONE)
- $f : X \twoheadrightarrow Y$ (SURIEZIONE)
- $f : X \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow Y$ (BIIEZIONE O CORRISPONDENZA BIUNIVOCA)

- $f[A] = \{ f(x) \mid x \in A \}$ (IMMAGINE DI A MEDIANTE f)
- $f^{-1}[B] = \{ x \in X \mid f(x) \in B \}$ (IMMAGINE INVERSA DI B MEDIANTE f)
- FUNZIONE INVERSA DI UNA FUNZIONE INIETTIVA
- COMPOSIZIONE DI FUNZIONI

CARDINALITÀ DI INSIEMI

- DUE INSIEMI A E B HANNO LA STESSA CARDINALITÀ SE ESISTE UNA CORRISPONDENZA BIUNIVOCA TRA ESSI:

$$A =_c B \iff_{def} (\exists f)(f : A \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow B)$$

- $\{0,1,2,\dots\} =_c \{1,2,3,\dots\}$ $\quad (x \mapsto x+1)$
- $]0,1[\, =_c \,]0,2[$ $\quad (x \mapsto 2x)$
- PROP.

$$A =_c A$$

$$A =_c B \implies B =_c A$$

$$A =_c B \wedge B =_c C \implies A =_c C$$

($=_c$ È UNA RELAZIONE DI EQUIVALENZA)

- $A \leq_c B \overset{def}{\iff} (\exists C)(C \subseteq B \wedge A =_c C)$

- PROP. $A \leq_c B \iff (\exists f)(f : A \rightarrowtail B)$

- DEF. A E' FINITO SE $A =_c \{i \mid i < n\} = \{0, 1, \dots, n-1\}$ PER QUALCHE INTERO n

  ALTRIMENTI A E' INFINITO

- DEF. A E' NUMERABILE SE A E' FINITO OPPURE $A =_c \mathbb{N}$

- TEOREMA (CANTOR)

  SIA $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, A_i NUMERABILE $\forall i \in \mathbb{N}$.

  ALLORA $\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$ E' NUMERABILE.

- PROP: - $\mathbb{Z}$ E' NUMERABILE
  - $\Delta = \{(a_0, a_1, \dots) \mid (\forall i)(a_i = 0 \vee a_i = 1)\}$ NON E' NUMERABILE
  - $\mathbb{R}$ NON E' NUMERABILE

- DEF: $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$

  $A_1 \times \dots \times A_n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 \in A_1, \dots, x_n \in A_n\}$

  $A^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in A\}$

  (PRODOTTO CARTESIANO)

- PROP: - SE $A_1, \dots, A_n$ SONO NUMERABILI, $A_1 \times \dots \times A_n$ E' NUMERABILE
  - SE A E' NUMERABILE
    - A^n E' NUMERABILE, PER OGNI $n \in \mathbb{N}$
    - $\bigcup_{n=2}^{\infty} A^n$ E' NUMERABILE

- NUMERI ALGEBRICI: SOLUZIONI DI POLINOMI A COEFFICIENTI IN $\mathbb{Z}$

- PROP (CANTOR)

  L'INSIEME DEI NUMERI ALGEBRICI E' NUMERABILE

- QUINDI: ESISTONO NUMERI REALI NON ALGEBRICI (LIOUVILLE)

- DEF: $pow(A) = \{ X \mid X$ E' UN INSIEME E $X \subseteq A \}$

- PROP (CANTOR): $A <_c pow(A)$

- PROP: $pow(\mathbb{N}) \leq_c \mathbb{R}$

  $\mathbb{R} \leq_c pow(\mathbb{N})$

- TEOREMA (CANTOR-SCHRÖDER-BERNSTEIN)

$$A \leq_c B \wedge B \leq_c A \Rightarrow A =_c B$$

PERTANTO

- PROP: $pow(\mathbb{N}) =_c \mathbb{R}$

⋮

- ARITMETICA TRANSFINITA

⋮

- ALCUNI PROBLEMI APERTI SU QUESTIONI DI EQUINUMEROSITÀ HANNO GIOCATO UN RUOLO FONDAMENTALE NEI SUCCESSIVI SVILUPPI DELLA TEORIA DEGLI INSIEMI AGLI INIZI DEL 1900.

IPOTESI DELLA CONFRONTABILITÀ DELLE CARDINALITÀ:

$$(\forall A, B)\ (A \leq_c B \ \vee\ B \leq_c A)$$

IPOTESI DEL CONTINUO (CH)

$$(\forall X \subseteq \mathbb{R})\ [X \leq_c \mathbb{N} \ \vee\ X =_c \mathbb{R}]$$

IPOTESI GENERALIZZATA DEL CONTINUO (GCH)

$$(\forall X \subseteq pow(A))\ [X \leq_c A \ \vee\ X =_c pow(A)]$$

IL PRINCIPIO GENERALE DI COMPRENSIONE E' STATO INIZIALMENTE ALLA BASE DEGLI SVILUPPI DELLA TEORIA INTUITIVA DEGLI INSIEMI (SVILUPPATA DA CANTOR) INSIEME ALLA PROPRIETA' DI ESTENSIONALITA'

PROPRIETÀ DI ESTENSIONALITÀ

PER OGNI COPPIA DI INSIEMI A E B SI HA:

$$A = B \iff (\forall x)(x \in A \longleftrightarrow x \in B)$$

PRINCIPIO DI COMPRENSIONE

PER OGNI PROPRIETÀ n-ARIA P ESISTE UN INSIEME

$$A = \{ \vec{x} \mid P(\vec{x}) \}$$

I CUI ELEMENTI SONO ESATTAMENTE TUTTE E SOLE LE n-UPLE $\vec{x}$ CHE SODDISFANO $P(\vec{x})$

NEL 1902 BERTRAND RUSSEL COMUNICÒ A GOTTLOB FREGE IL SUO CELEBRE PARADOSSO, EVIDENZIANDO LA NON-VALIDITÀ DEL PRINCIPIO DI COMPRENSIONE:

SIA $R = \{x \mid x \notin x\}$.

SE $R \in R$, ALLORA $R \notin R$.

D'ALTRA PARTE SE $R \notin R$, ALLORA $R \in R$.

IN ENTRAMBI I CASI SI HA UNA CONTRADDIZIONE E QUINDI R NON PUÒ ESSERE UN INSIEME, CIOÈ IL PRINCIPIO DI COMPRENSIONE NON È VALIDO

SI USCÌ DALLA CRISI DEI FONDAMENTI DELLA TEORIA DEGLI INSIEMI (E QUINDI ANCHE DI TUTTA LA MATEMATICA BASATA SU TALE TEORIA) GRAZIE ALL'OPERA DI ZERMELO CHE, A PARTIRE DAL 1908, SVILUPPÒ UN NUOVO APPROCCIO ASSIOMATICO ALLA TEORIA DEGLI INSIEMI, PROPONENDO UNA LISTA DI ASSIOMI, ESTESA SUCCESSIVAMENTE CON POCHI ALTRI

ASSIOMA DI ESTENSIONALITÀ

PER OGNI COPPIA DI INSIEMI A E B SI HA:

$$A = B \iff (\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

ASSIOMA DELL' INSIEME VUOTO

ESISTE UN INSIEME, DENOTATO $\emptyset$, PRIVO DI ELEMENTI

ASSIOMA DELLA COPPIA

PER OGNI COPPIA DI INSIEMI x E y ESISTE UN INSIEME A I CUI UNICI ELEMENTI SONO x E y.

(IN VIRTÙ DELL'ASSIOMA DI ESTENSIONALITÀ, TALE INSIEME E' UNICO ED E' DENOTATO $\{x, y\}$)

- SE $x = y$, ALLORA $\{x, x\} = \{x\}$ E' IL SINGOLETTO DI x
- MEDIANTE GLI ASSIOMI VISTI SINORA, SIAMO IN GRADO DI COSTRUIRE I SEGUENTI SEMPLICI INSIEMI, TUTTI DI CARDINALITÀ AL PIÙ 2:

$\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\{\emptyset\}\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $\{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$, ...

ASSIOMA DI SEPARAZIONE

PER OGNI INSIEME A E PER OGNI PROPRIETÀ UNARIA P, ESISTE UN INSIEME B TALE CHE $x \in B \longleftrightarrow x \in A \wedge P(x)$

- IN VIRTÙ DELL'ASSIOMA DI ESTENSIONALITÀ, TALE INSIEME B E' UNICO ED E' DENOTATO $B = \{x \in A \mid P(x)\}$
- MEDIANTE L'ASSIOMA DI SEPARAZIONE POSSIAMO DEFINIRE LE OPERAZIONI INSIEMISTICHE DI INTERSEZIONE E DIFFERENZA

$$A \cap B =_{def} \{x \in A \mid x \in B\}$$

$$A \setminus B =_{def} \{x \in A \mid x \notin B\}$$

L'ARGOMENTAZIONE DI RUSSEL CI CONSENTE DI DIMOSTRARE IL SEGUENTE TEOREMA

TEOREMA PER OGNI INSIEME A, L'INSIEME

$$r(A) =_{def} \{x \in A \mid x \notin x\}$$

NON APPARTIENE AD A. PERTANTO, LA COLLEZIONE V DI TUTTI GLI INSIEMI **NON** E' UN INSIEME.

DIM PER L'ASSIOMA DI SEPARAZIONE $r(A)$ E' UN INSIEME.

INOLTRE, SE $r(A) \in A$ SI HA:

$$r(A) \in r(A) \longleftrightarrow r(A) \notin r(A),$$

ASSURDO.

ASSIOMA DELL'INSIEME POTENZA

PER OGNI INSIEME A ESISTE UN INSIEME B I CUI ELEMENTI SONO I SOTTOINSIEMI DI A, CIOE'

$$X \in B \leftrightarrow X \subseteq A \qquad (\text{CIOE'}\ (\forall y)(y \in X \rightarrow y \in A))$$

- AL SOLITO, L'ASSIOMA DI ESTENSIONALITA' IMPLICA L'UNICITA' DI TALE INSIEME B CHE VIENE DETTO INSIEME POTENZA DI A ED E' DENOTATO $pow(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$
- SI HA $pow(\emptyset) = \{\emptyset\}$

$$pow(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

$$pow(\{\emptyset, \{\emptyset\}\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}\}\}$$

...

ASSIOMA DELL'UNIONE

PER OGNI INSIEME A ESISTE UN INSIEME B I CUI ELEMENTI SONO GLI ELEMENTI DEGLI ELEMENTI DI A, CIOE'

$$x \in B \longleftrightarrow (\exists Y \in A)(x \in Y)$$

- PER L'ASSIOMA DI ESTENSIONALITA', TALE INSIEME E' UNICO E VIENE DETTO UNIONE (UNARIA) DI A E DENOTATO CON

$$\bigcup A =_{df} \{x \mid (\exists Y \in A)(x \in Y)\}$$

- SI PONE $\quad A \cup B =_{df} \bigcup \{A, B\}$ (UNIONE BINARIA)

- SI HA: $\quad \bigcup \emptyset = \bigcup \{\emptyset\} = \emptyset$

ASSIOMA DELL'INFINITO

ESISTE UN INSIEME I CHE CONTIENE L'INSIEME VUOTO $\emptyset$ E TALE DA CONTENERE IL SINGOLETTO DI CIASCUN SUO ELEMENTO, CIOE'

$$\emptyset \in I \wedge (\forall x)(x \in I \rightarrow \{x\} \in I)$$

- SI OSSERVI CHE L'INSIEME I CONTIENE GLI "INFINITI" ELEMENTI $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}, \ldots$

I QUALI SONO A DUE A DUE DISTINTI PER L'ASSIOMA DI ESTENSIONALITA'

RAPPRESENTAZIONE DI ALCUNI OGGETTI NELLA TEORIA DEGLI INSIEMI

COPPIE ORDINATE (KURATOWSKI)

$$(x,y) =_{df} \{\{x\},\{x,y\}\}$$

PRODOTTO CARTESIANO

$$A \times B = \{(x,y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$$

RELAZIONI

$$R \subseteq A \times B$$

FUNZIONI

$$f \subseteq A \times B \wedge (\forall x \in A)(\exists y \in B)\,(x,y) \in f$$
$$\wedge\ (\forall x \in A)(\forall y \in B)(\forall y' \in B)\big((x,y) \in f \wedge (x,y') \in f \rightarrow y = y'\big)$$

....

INTERI DI VON NEUMANN (E ORDINALI)

$0 =_{def} \emptyset$

$1 =_{def} \{0\} = \{\emptyset\}$

$2 =_{def} \{0,1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

$3 =_{def} \{0,1,2\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

$\ldots$

$n+1 =_{def} \{0,1,2,\ldots,n\} = n \cup \{n\}$

$\ldots$

$\omega = \{0,1,2,\ldots\}$ (PRIMO ORDINALE LIMITE)

$\omega+1 = \omega \cup \{\omega\}$

$\vdots$

ASSIOMA DI SCELTA

PER OGNI COPPIA DI INSIEMI A E B E PER OGNI RELAZIONE BINARIA $P \subseteq A \times B$, SE $(\forall x \in A)(\exists y \in B)((x, y) \in P)$ ALLORA ESISTE $f : A \to B$ TALE CHE

$$(\forall x \in A)\ (x, f(x)) \in P,$$

ASSIOMA DI RIMPIAZZAMENTO

PER OGNI INSIEME A E PER OGNI FORMULA $\varphi(x, y)$ TALE CHE $(\forall x)(\exists! y)\ \varphi(x, y)$ SIA DIMOSTRABILE $\{ y \mid \varphi(x, y) \wedge x \in A \}$ E' UN INSIEME.

NOTA: LA FORMULA φ POTREBBE ANCHE CONTENERE DEI PARAMETRI. IN TAL CASO L'ASSIOMA CONSENTE DI DEFINIRE INSIEMI PARAMETRICI.

ASSIOMA DI REGOLARITÀ (O DI FONDAZIONE)

$$(\forall x)(x \neq \emptyset \longrightarrow (\exists m \in x)(m \cap x = \emptyset))$$

UNIVERSO DI VON NEUMANN

$V_0 = \emptyset$

$V_{\alpha+1} = P(V_\alpha)$

$V_\lambda = \bigcup_{\mu<\lambda} V_\mu$ (λ ORDINALE LIMITE)

$V = \bigcup_{\mu \in Ord} V_\mu$ (Ord CLASSE DEGLI ORDINALI)

$HF =_{df} V_\omega$ (INSIEME DEGLI EREDITARIAMENTE FINITI)

$\emptyset^{(0)} =_{df} \emptyset$

$\emptyset^{(n+1)} =_{df} \{\emptyset^{(n)}\}$

ES. $\emptyset^{(1)} = \{\emptyset\}$, $\emptyset^{(2)} = \{\{\emptyset\}\}$, ...

RANGO DI UN INSIEME

$$x \in V \longrightarrow \operatorname{rank}(x) =_{df} \min_{\alpha} (x \in V_{\alpha+1})$$

ES.

$\operatorname{rank}(\emptyset) = 0$ INFATTI $\emptyset \in V_1$ E $\emptyset \notin V_0$

$\operatorname{rank}(\emptyset^2) = 2$ INFATTI $\emptyset^2 \in V_3$ E $\emptyset^2 \notin V_2$

$\operatorname{rank}(\{\emptyset, \emptyset^2\}) = 3$ INFATTI $\{\emptyset, \emptyset^2\} \in V_4$ E $\{\emptyset, \emptyset^2\} \notin V_3$

PROPRIETA'

$$x \in y \longrightarrow \operatorname{rank}(x) < \operatorname{rank}(y)$$

$$\operatorname{rank}(\{x_1, x_2, \dots, x_k\}) = \left(\max_{i=1\dots k} \operatorname{rank}(x_i)\right) + 1$$